



Instabilité et turbulence dans des écoulements bidimensionnels MHD

Jean-Michel N'Guyen Duc

► To cite this version:

Jean-Michel N'Guyen Duc. Instabilité et turbulence dans des écoulements bidimensionnels MHD. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1988. Français. NNT: . tel-01340545

HAL Id: tel-01340545

<https://hal.science/tel-01340545>

Submitted on 1 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

Jean-Michel NGUYEN DUC

Ingénieur ENSHM

pour obtenir le titre de DOCTEUR

de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

Spécialité : Mécanique

Instabilité et turbulence dans des écoulements bidimensionnels MHD

Soutenue le 6 juin 1988 devant la Commission d'Examen :

M.	MOREAU R.	Président
M.	COUDER Y.	Rapporteurs
M.	CASTAING B.	
M.	CAPERAN Ph.	Examineurs
M.	GUIRAUD J-P.	
M.	SOMMERIA J.	

Thèse préparée au sein du laboratoire MADYLAM.

Avant propos

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Messieurs Philippe CAPERAN et Joël SOMMERIA. Tous les deux m'ont apporté leurs compétences scientifiques et leur savoir faire. Je tiens à témoigner de l'amitié dont ils ont fait preuve dans ce travail d'encadrement.

Je remercie Monsieur MOREAU, Professeur à l'INPG, qui après avoir participé à ma formation dans plusieurs domaines de la mécanique des fluides, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury. Mes remerciements vont aussi à Monsieur CASTAING, Professeur à l'USTMG, à Monsieur COUDER, Professeur à Paris et à Monsieur GUIRAUD qui ont bien voulu apporter leurs critiques à ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier le personnel du service électronique, en particulier Messieurs LOUIS et MARTIN pour l'aide quotidienne qu'ils m'ont donnée pour mettre au point les systèmes d'amplification et d'acquisition de données. Je remercie également les membres du service technique de MADYLAM qui ont rendu le dispositif expérimental facile à vivre.

Introduction

La turbulence hydrodynamique est pour le jeune chercheur une hydre à plusieurs têtes. Sans définition précise, elle est caractérisée par un cocktail d'ingrédients: évolution chaotique rendant les prévisions à plus ou moins long terme impossibles, comportement spatial complexe où une gamme continue d'échelles de mouvement sont en interaction, impossibilité à reproduire exactement un écoulement donné.

Il aborde généralement le sujet par une approche statistique, développée dans des ouvrages de base: Batchelor(1953), Hinze(1959), Monin et Yaglom(1971) ou Tennekes et Lumley(1972). Cette approche est validée par le caractère fluctuant et non reproductible de l'état turbulent. L'élève chercheur apprend donc à utiliser un arsenal de mathématiques statistiques afin de décrire un phénomène aléatoire. Pour décrire le continuum d'échelles spatiales il est utile de considérer le champ de vitesse turbulent dans l'espace de Fourier. Travailler dans l'espace spectral ne posera bientôt plus de problème à ce jeune collègue. La modélisation statistique a permis d'obtenir de très bon résultats. Il s'enthousiasme pour les lois phénoménologiques à la Kolmogorov, basées sur des hypothèses simples, comme l'existence d'une gamme d'échelles spatiales autosimilaires, et si bien vérifiées expérimentalement. L'idée de la cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites où elle est dissipée à cause de la viscosité sert encore de référence aujourd'hui, même si des améliorations techniques lui ont été ajoutées. Il est surprenant que de telles idées aient pu naître alors qu'en fait on ne connaissait pas grand chose sur les moments statistiques de ce phénomène aléatoire. La mise au point des modèles de fermeture est instructive à ce sujet. En effet les premiers modèles du type Quasi-Normal donnent une évolution qui conduit à des spectres d'énergie négatifs. La constante progression dans la qualité des équations de fermeture (Quasi-Normal, Quasi-Normal Markovianisé et Quasi Normal Markovianisé avec amortissement turbulent) a permis de mieux comprendre les échanges d'énergie entre les différents nombres d'onde.

Une telle description de la turbulence donne une information sur un écoulement statistiquement stationnaire et homogène spatialement. Elle est intéressante pour une turbulence pleinement développée. Elle sera incapable de prendre en compte la nature organisée de certains écoulements. Entre l'écoulement parfaitement laminaire et l'écoulement turbulent, la transition n'est pas discontinue. La phase intermédiaire est étudiée depuis le début du siècle mais une avancée considérable a eu lieu ces dernières années.

L'apprenti chercheur aborde les questions relatives à la transition vers la turbulence en étudiant la théorie de la stabilité hydrodynamique. Ce vaste sujet, source de sérieuses difficultés mathématiques ne pourrait être résumer ici. Remarquons seulement que les problèmes de stabilité hydrodynamique linéaires et à fortiori de stabilité non linéaire ne sont résolubles que pour des écoulements de base simples.

En parallèle, la théorie des systèmes dynamiques a connu un essor considérable.

Même s'il n'a pas suivi depuis le début l'approche déterministe de la turbulence par l'étude des systèmes dynamiques, l'apprenti chercheur voit arriver cette discipline à maturité comme le prouve la parution récente de nombreux articles de revue [Eckman 1981, Landford 1982, Ott 1981, Guckenheimer 1984]. Le champ de l'étude semble plus restreint puisque seul est concerné un petit nombre de degrés de liberté. Pourtant l'évolution déterministe de ces systèmes, généralement décrits par un système simple d'équations différentielles ordinaires non-linéaires, peut être complexe et chaotique. Les notions d'imprédictibilité ou de sensibilité aux conditions initiales en sont les caractères principaux. Utilisée dans le cadre de la transition à la turbulence dans des écoulements bien contrôlés, confinés dans des domaines fermés, la théorie décrit les diverses routes vers la turbulence. Fasciné par l'étrange beauté des attracteurs, le jeune chercheur n'oublie pas cependant que la turbulence développée a peu de chance de pouvoir être étudiée à partir d'attracteurs de dimension raisonnable [Ott, Gagne 1987]. En effet un attracteur de dimension supérieur à 6 est difficile à diagnostiquer.

Maintenant que nous avons donné les grands traits des sujets rattachés à la turbulence hydrodynamique, nous allons présenter dans quelles parties s'insinue notre travail expérimental.

Nous nous limitons d'abord aux écoulements bidimensionnels; c'est une restriction de taille mais elle est nécessaire si on veut décrire la géométrie de l'écoulement à partir d'un système de mesures. Des techniques de visualisation relativement simples offrent déjà une vue complète du système étudié. Dans le premier chapitre nous rappelons les éléments d'électromagnétisme et de mécanique des fluides permettant d'affirmer que, sous certaines conditions, l'écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité a une dynamique quasi-bidimensionnelle. L'obtention de ce résultat provient de travaux théoriques et expérimentaux qui ont engagé plusieurs laboratoires de par le monde. Un modèle expérimental, constitué d'une couche horizontale de mercure de faible épaisseur entre deux parois isolantes et soumis à un champ magnétique uniforme vertical, sert de base à l'étude de divers écoulements bidimensionnels.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à des structures tourbillonnaires isolées, composées de deux tourbillons de signes opposés se déplaçant sous l'action mutuelle de leur champ de vitesse. De telles structures apparaissent spontanément dans le sillage bidimensionnel derrière un cylindre. Elles ont été aussi observées dans le contexte des écoulements atmosphériques et océaniques où elles sont appelées modons. Ces couples de tourbillons ont une remarquable stabilité et, par leur faculté de propagation, participent activement à la contamination d'une zone laminaire à partir d'un cœur turbulent. Nous étudions les couples de tourbillons par trajectographie.

Dans le troisième chapitre, nous décrivons la phase de déstabilisation d'un réseau périodique à symétrie hexagonale de tourbillons. Dans la classification usuelle des théoriciens de la stabilité hydrodynamique, on fait une distinction entre les concepts d'instabilités absolues (croissance sur place d'une perturbation) et d'instabilités convectives (transport spatial de l'instabilité). L'instabilité que nous étudions s'apparente au premier et ressemble donc assez à la convection de Rayleigh-Bénard. Il existe cependant une différence majeure. Dans le cas de la convection, ou de l'écoulement de Taylor-Couette, l'écoulement spatialement périodique résulte d'une première instabilité à partir d'un état homogène. Ce type de transition a été largement étudié expérimentalement et théoriquement; en géométrie confinée un petit nombre de tourbillons se forment et des instabilités secondaires à grandes longueurs d'onde se manifestent. Si l'écoulement n'est pas contraint dans une "petite boîte", le désordre spatial et le chaos temporel suivent de très près la première instabilité. Dans le système

que nous étudions, l'état de base est un écoulement forcé de façon spatialement périodique. On voit que par rapport au premier type d'écoulement périodique, on perd l'invariance par translation. On relève assez peu de travaux expérimentaux sur les écoulements forcés périodiquement. Cela tient sûrement à la difficulté à réaliser le forçage. L'intérêt des théoriciens pour ce genre d'écoulements tient au fait qu'il leur permet de sortir du cadre des écoulements parallèles ou quasi-parallèles. C'est d'ailleurs l'écoulement bidimensionnel de Kolmogorov (écoulement périodique parallèle plan) qui a été le premier abordé théoriquement et expérimentalement; des instabilités à grandes échelles ont été observées. Le cas d'un réseau carré de tourbillons a été étudié par Somméria; l'appariement de tourbillons de même signe est, dans ce cas, le mécanisme de déstabilisation.

Pour certains théoriciens, l'anisotropie de l'écoulement de base est un facteur primordial. Ils prévoient un comportement radicalement différent pour un réseau de tourbillons triangulaires. C'est ce qui nous a attiré vers le choix du réseau.

Nous avons l'occasion d'utiliser le forçage de l'écoulement, très au delà du seuil de transition, pour produire une turbulence bidimensionnelle développée au quatrième chapitre. Les prédictions théoriques sous forme de lois phénoménologiques sont encore très discutées. La cascade d'ensrophie (carré de la vorticité) a été l'objet de simulation numérique directe à haute résolution afin d'évaluer la pente du spectre. La cascade inverse d'énergie est plus difficile encore à simuler numériquement. Si la preuve de l'existence des transferts inverses d'énergie est aujourd'hui faite, il n'en est rien de l'existence de la zone inertielle. La dimension de notre cuve, plus de deux fois plus grande que celle de Somméria, pouvait nous laisser espérer que la cascade inverse d'énergie puisse s'installer sur plus d'une décade de nombre d'onde. De plus des mesures simultanées des deux composantes de vitesse permettent une étude beaucoup plus précise de la turbulence.

Chapitre I

Écoulements bidimensionnels et Magnétohydrodynamique

1. Étude Bibliographique

1-1. Premier Aperçu

1-2. Mécanismes

1-2-1. Approximation Quasi-Statique

1-2-2. Caractère Anisotrope de la Force de Laplace

1-2-3. Contrôle de l'Ecoulement par la Couche Limite de Hartmann

2. Réalisation d'un Ecoulement Bidimensionnel

2-1. Création de l'Ecoulement

2-2. Interprétation des Mesures de Potentiel Electrique

2-3. Forme Adimensionnelle

Un écoulement initialement bidimensionnel ne le reste pas en général. Des perturbations de nature tridimensionnelle s'y développent et il dégénère alors rapidement en écoulement tridimensionnel. Un exemple bien étudié de ce phénomène est celui de la couche de mélange [Jimenez 1983, Lasheras 1986]. Le caractère de bidimensionnalité est conservé lorsqu'une force stabilisatrice, anisotrope, inhibe la croissance des perturbations tridimensionnelles. Cette force existe, sous diverses formes, dans plusieurs situations réelles:

- dans les écoulements soumis à une forte rotation
- dans les fluides stratifiés
- dans les écoulements de fluides électro-conducteurs soumis à un champ magnétique intense

Les conditions aux limites peuvent également contraindre un écoulement à rester bidimensionnel telles celles très particulières concernant une bulle de savon liquide [Couder 1984].

En fait, il serait plus juste de parler de quasi-bidimensionnalité; dans toutes les configurations citées, l'effet stabilisateur varie continuellement en intensité et il n'est pas aussi efficace à toutes les échelles spatiales. Il est donc nécessaire de bien connaître les mécanismes stabilisants pour déterminer le domaine d'échelles où l'écoulement peut être considéré comme bidimensionnel.

De nombreux travaux expérimentaux et théoriques ont été consacrés à l'écoulement de fluides conducteurs de l'électricité en la présence d'un champ magnétique. Nous allons donc décrire comment employer les forces électromagnétiques, afin de produire des écoulements bidimensionnels, dans l'étude bibliographique suivante.

1. Étude Bibliographique

1-1. Premier Aperçu

L'action d'un champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide électroconducteur peut être assez frappante; lorsqu'on mesure le coefficient de frottement à la paroi d'un écoulement turbulent en conduite de géométrie quelconque, en présence d'un champ magnétique transverse, on remarque que ce coefficient diffère complètement de celui obtenu sans champ magnétique. Il est proche de valeurs calculées pour un écoulement laminaire en présence de champ magnétique. Pourtant, des mesures de vitesses fluctuantes indiquent que l'intensité de la turbulence reste élevée [Lielausis 1975]. Le tenseur des contraintes de Reynolds est donc fortement modifié. Cela signifie également que les transferts d'énergie ont une forme particulière dans les écoulements MHD.

Les mesures globales que l'on a citées ont été complétées par des expériences spécifiques concernant la dynamique des écoulements MHD. Deux configurations expérimentales ont été utilisées:

-L'école de Riga dans les années 1970 [Tsinober, Branover, Kolesnikov] considère un écoulement, dans une conduite rectangulaire, perturbé en amont par une grille et soumis à un champ magnétique transverse.

-l'autre installation expérimentale [Alemany, Caperan, Moreau] est constituée d'une grille se déplaçant dans un cylindre vertical de mercure avec un champ magnétique axial.

Dans le premier cas, plusieurs caractéristiques d'une turbulence bidimensionnelle ont été observées: la composante de vitesse parallèle à \mathbf{B} est petite devant la composante transverse, l'échelle intégrale perpendiculaire croît assez rapidement, le champ de vitesse est bien corrélé dans la direction du champ, l'énergie décroît lentement, des spectres d'énergie cinétique en k^{-3} sont mesurés [Sukoriansky 1987]. Des mesures de dispersion de contaminants passifs, que se soit température [Somméria 1983] ou polluant chimique [Kolesnikov & Tsinober 1974], montrent que les transferts sont presque supprimés dans la direction du champ magnétique alors qu'au contraire ils sont très importants dans le plan perpendiculaire.

Dans la seconde configuration, les trois composantes de vitesse sont du même ordre de grandeur, l'échelle perpendiculaire au champ est bloquée tandis que l'échelle parallèle croît indéfiniment et la décroissance de l'énergie cinétique est rapide; cependant que des spectres avec une zone en k^{-3} sont également mesurés.

1-2. Mécanismes

1-2-1. Approximation Quasi-Statique

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ , de conductivité électrique σ et de viscosité cinématique ν , soumis à un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{n}$. Le champ de vitesse \mathbf{u} obéit aux équations de Navier-Stokes avec la force de volume de Laplace \mathbf{F} :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (1-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1-2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (1-3)$$

Le champ magnétique \mathbf{B} est régi par les équations de l'électromagnétisme:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \text{Loi d'Ampère} \quad (1-4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Loi de Faraday} \quad (1-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1-7)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \text{Loi d'Ohm} \quad (1-8)$$

(Nous négligeons le terme $\partial \mathbf{E} / \partial t$ dans l'équation (1-4))

Les contributions théoriques ont porté sur l'action d'un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 sur un écoulement turbulent d'un fluide électro-conducteur dans l'approximation des faibles nombres de Reynolds magnétiques $R_m = \mu \sigma V L$. Cette hypothèse traduit le fait que les vitesses V et les longueurs L mises en jeu sont suffisamment faibles pour que le champ magnétique induit par l'écoulement soit petit par rapport au champ magnétique imposé. Il s'agit d'une simplification dans la théorie générale de la Magnétohydrodynamique qui, elle, est constituée d'un couplage extrêmement riche entre équations de Navier-Stokes et équations de l'électromagnétisme. Elle est capable d'engendrer un effet tel que l'effet dynamo; cette simplification est en général bien justifiée pour les conditions expérimentales de laboratoire. On posera donc que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{B}_0$$

Moyennant cette hypothèse les équations de l'électromagnétisme se ramènent à:

$$\mathbf{E} = - \nabla \phi \quad (1-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1-10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (1-11)$$

Le potentiel électrostatique ϕ vérifie :

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (1-12)$$

Les équations 1-(1,2,3 et 9,10,11) constituent ce qu'on a coutume d'appeler le modèle quasi-statique.

1-2-2. Caractère Anisotrope de la Force de Laplace

L'expression de la force de Laplace est une fonction linéaire de la vitesse. Elle ne s'exprime pas simplement dans l'espace physique où elle prend la forme suivante:

$$\mathbf{F} = \frac{\sigma}{\rho} (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \quad (1-13)$$

Mais il est intéressant de la considérer dans l'espace de Fourier où elle s'écrit:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{\rho} (-i \mathbf{k} \hat{\phi} + \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \quad (1-14)$$

$$\text{avec} \quad -k^2 \hat{\phi} = i \mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) \quad (1-15)$$

L'équation (1-15) est la transformée de l'équation (1-12). On en déduit alors:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{1}{k^2} [\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0)] \mathbf{k} - \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0 \right] \times \mathbf{B}_0 \quad (1-16)$$

$$\text{ou bien} \quad \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{k^2} \hat{\mathbf{u}} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \cdot (\mathbf{B}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}})}{k^2} \mathbf{k} \right] \quad (1-17)$$

On isole la force en partie rotationnelle et en partie solénoïdale que l'on écrit usuellement sous forme d'une pression; les transformées respectives de ces termes sont:

$$\hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{k}, t) = -\frac{\sigma}{\rho} B_0^2 \cos^2 \theta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \quad (1-18)$$

$$\hat{p}_m(\mathbf{k}, t) = -i \frac{\sigma}{\rho} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \cdot (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}_0)}{k^2} \quad (1-19)$$

La partie rotationnelle \mathbf{F}_r correspond à un effet dissipatif indépendant du nombre d'onde $k = |\mathbf{k}|$. Elle a un caractère fortement anisotrope à cause de sa dépendance de l'angle θ entre le vecteur d'onde considéré et le champ magnétique. L'énergie dissipée par effet Joule s'exprime, dans l'espace spectral par:

$$\mathcal{E}_j = \frac{\sigma}{\rho} (B_0 \cos \theta)^2 E(\mathbf{k}) \quad (1-20)$$

où $E(\mathbf{k})$ est le spectre d'énergie cinétique. Moreau (1968) définit un cône d'axe \mathbf{B} et d'angle au sommet β à l'extérieur duquel est confiné l'essentiel de l'énergie [figure 1-1]; il est défini par:

$$\cos^2 \beta = \frac{\int \cos^2 \theta E(\mathbf{k}) d^3 k}{\int E(\mathbf{k}) d^3 k} \quad (1-21)$$

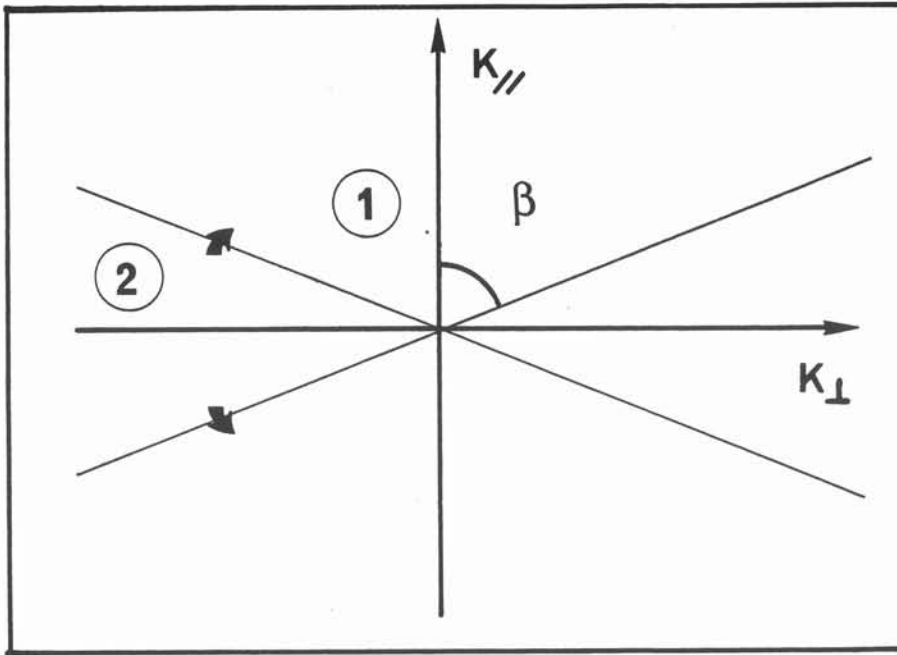


figure I-1

Si on néglige les termes de viscosité, l'énergie cinétique globale :

$$\mathcal{E}(t) = \int E(\mathbf{k}) d^3k \quad (I-22)$$

évolue suivant l'équation :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} B_o^2 \cos^2 \beta \mathcal{E} \quad (I-23)$$

Un temps caractéristique de la dissipation par effet Joule découle des calculs précédents:

$$t_j = \left(\frac{\sigma}{\rho} B_o^2 \cos^2 \beta \right)^{-1} \quad (I-24)$$

Moffatt (1967) a étudié en particulier la réponse initiale dans le cas asymptotique où on applique brusquement un fort champ magnétique sur une turbulence isotrope. Cette situation n'est pas facile à obtenir expérimentalement; les conditions de réalisation sont examinées par Moffatt puis par Alemany et col. (1979). Les forces de viscosité sont négligeables. Forces de Laplace et forces d'inertie sont en compétition. Comme l'énergie est distribuée de manière isotrope, on a initialement:

$$t_j = t_{j_0} = \frac{\sigma}{\rho} B_o^2 \quad (I-25)$$

Le temps caractéristique des transferts inertiels est du même ordre que le temps de retournement des tourbillons $t_0 = l_0/u_0$. Lorsque le paramètre d'interaction $N = t_0/t_{j_0}$ est grand, les effets électromagnétiques sont prépondérants. Moffatt montre alors que, dans les premiers instants suivant la mise en place du champ, la turbulence évolue vers une homogénéisation dans la direction du champ magnétique. La vitesse dans la direction parallèle à \mathbf{B}_0 n'est, par contre, pas nulle. Au contraire, elle peut être supérieure à la

vitesse transverse comme le montre les simulations numériques de Schumann (1975). Ces dernières sont en accord avec la théorie linéarisée de Moffatt mais les temps d'intégration sont petits, typiquement du même ordre que le temps de retournement des gros tourbillons.

Lorsqu'on étudie la turbulence pour des temps beaucoup plus longs, l'anisotropie est plus forte. La dissipation d'énergie par effet Joule est moins efficace. Un autre équilibre peut s'installer: l'énergie est transférée depuis les zones peu influencées par le champ magnétique et contenant l'énergie vers le cône de dissipation; ces transferts angulaires compensent l'énergie perdue dans le cône de dissipation. L'égalité des temps caractéristiques des deux mécanismes permet de caractériser les échelles transverse et longitudinale; en effet:

$$\frac{l_o}{u_o} = \cos^2 \beta \frac{\rho}{\sigma B_o^2} \Rightarrow \cos^2 \beta = N^{-1}$$

et l'énergie est concentrée dans la zone où les nombres d'onde vérifient:

$$\text{tg } \beta < \frac{k_{\perp}}{k_{//}} \quad \text{soit} \quad k_{//} < k_{\perp} N^{-1/2} \quad \text{lorsque } N \gg 1 \quad (I-25)$$

Aleman et col. interprètent leurs résultats expérimentaux avec cette phénoménologie. Elle conduit effectivement à des spectres longitudinaux et transversaux en k^{-3} , à une décroissance rapide de l'énergie d'un nombre d'onde en t^{-2} , et à une augmentation lente de l'échelle transverse.

1-2-3. Contrôle de l'Écoulement par la Couche Limite de Hartmann

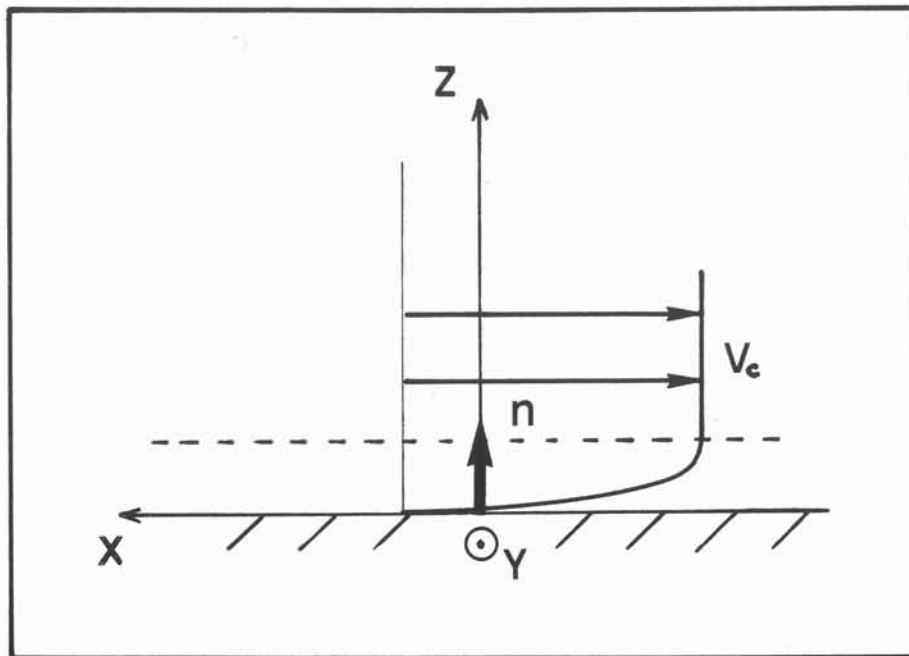


figure I-2

Le rôle important joué par les parois transverses au champ magnétique devait être explicité afin d'unifier les résultats apparemment contradictoires que donnaient les deux configurations expérimentales. On sait depuis longtemps [Hartmann et Lazarus 1937] que près des parois transverses au champ magnétique se développe une couche limite particulière, dite couche de Hartmann. Une revue des problèmes associés à cette couche a été menée par Hunt et Shercliff (1971). L'épaisseur de cette couche est typiquement $\delta_h = a/M$ où a est l'épaisseur de la zone fluide et $M = (\sigma/\rho\nu)^{1/2} a B_0$ le nombre de Hartmann. Lorsque ce dernier est élevé, cette couche est fine et les forces d'inertie sont faibles devant les forces de viscosité et les forces de Laplace. Les dérivées autres que les dérivées normales à la paroi sont négligeables ($\partial/\partial z \gg \partial/\partial x, \partial/\partial y$). Ces simplifications introduites dans le modèle quasi-statique donnent:

$$\frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0) = -\nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (1-27)$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (1-28)$$

Ce système permet de trouver les composantes de \mathbf{j} et \mathbf{u} parallèles à la paroi. Soient \mathbf{j}_c et \mathbf{V}_c représentant respectivement le courant et la vitesse dans le cœur de l'écoulement, le profil de vitesse dans la couche de Hartmann se raccorde en:

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{V}_{c\perp} (1 - \exp[-(\sigma/\rho\nu)^{1/2} B_0 z]) = \mathbf{V}_{c\perp} (1 - \exp[-z/\delta_h]) \quad (1-29)$$

Le changement de vitesse dans la couche de Hartmann donne lieu à une production de courant orthogonal au champ :

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}_{c\perp} + \sigma B_0 \exp[-(\sigma/\rho\nu)^{1/2} B_0 z] \mathbf{V}_c \times \mathbf{n} \quad (1-30)$$

La couche limite de Hartmann peut donc être vue comme une nappe de courant

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \mathbf{j}_\perp dz = (\sigma\rho\nu)^{1/2} \mathbf{V}_c \times \mathbf{n} \quad (1-31)$$

Dans le cas où la paroi est isolante, la condition de non divergence du courant électrique permet de déduire la composante de \mathbf{j} normale à la paroi en fonction de la composante normale de vortacité ω_z :

$$\mathbf{j}_z = (\sigma\rho\nu)^{1/2} (\nabla \times \mathbf{V}_c)_z = (\sigma\rho\nu)^{1/2} \omega_z \quad (1-32)$$

Dans le cœur de l'écoulement, on peut également relier le courant à la vortacité en prenant deux fois le rotationnel de la loi d'Ohm (1-8). Dans cette zone les variations le long du champ magnétique sont faibles; d'où:

$$\Delta_\perp \mathbf{j} = \sigma B_0 \partial \omega / \partial z \quad (1-33)$$

Somméria et Moreau (1982), déduisent des deux relations précédentes une condition sur la composante de vorticité transverse à une paroi isolante:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z}(x,y,0,t) = \frac{a}{M} \Delta_{\perp} \omega_z(x,y,0,t) \quad (I-34)$$

Ainsi, on remplace les conditions de parois classiques:

- non glissement
- nullité du flux de quantité de mouvement

par les lois de jonction de l'écoulement extérieur avec la couche limite de Hartmann:

- variation lente de la composante de vitesse transverse au champ au voisinage de la couche limite.
- nullité du flux de quantité de mouvement

A cette jonction, l'axe des tourbillons quasi bidimensionnels est pratiquement orthogonal aux parois transverses au champ. Seuls certains modes de déformation des tubes de tourbillons sont donc possibles. Les nombres d'onde excités ne pourront être que de la forme:

$$k_{//} = n \frac{\pi}{a} \quad (I-35)$$

On remarquera que dans le cas d'une surface libre, le flux de courant électrique est nul. La relation (I-34) est alors remplacé par:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z}(x,y,0,t) = 0 \quad (I-36)$$

L'orthogonalité des tourbillons parallèles à B_0 et de la surface est donc complète dans ce cas.

2. Réalisation d'un Écoulement Bidimensionnel

Les conditions définies précédemment sont réalisées expérimentalement en utilisant une couche de mercure horizontale de faible épaisseur, a , placée dans un champ magnétique vertical, uniforme et d'intensité constante B_0 . Le fluide est contenu dans une cuve dont les parois transverses au champ sont isolantes [figure I-3]. Les relations (I-25) et (I-35) indiquent qu'à l'extérieur de la couche limite les échelles définies par:

$$k_{\perp} < \frac{\pi}{a} N^{1/2} \quad (I-37)$$

ont une cinématique bidimensionnelle définie par un champ de vitesse $V(x,y,t)$. On détermine la force de Laplace dans l'équation (I-1) en écrivant l'équation de conservation du courant (I-10) sous la forme:

$$\nabla_{\perp} \cdot \int_0^a j_{\perp} dz = 0 \quad (I-38)$$

Le mouvement du fluide dans le cœur de l'écoulement est ainsi décrit par l'équation:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_c}{\partial t} + (\mathbf{V}_c \cdot \nabla) \mathbf{V}_c = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{V}_c - s \left(\frac{\sigma \nu}{\rho} \right)^{1/2} \frac{B_0}{a} \mathbf{V}_c \quad (I-39)$$

On reconnaît l'équation de Navier-Stokes pour un champ de vitesse bidimensionnel à laquelle s'ajoute un terme de frottement linéaire; les contraintes visqueuses dans la couche de Hartmann sont transférées dans le cœur de l'écoulement grâce aux courants électriques. Le temps caractéristique du frottement est:

$$t_h = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{\sigma \nu}{\rho} \right)^{1/2} \frac{B_0}{a} \right]^{-1} \quad (I-40)$$

s vaut 1 si une des parois transverses est une surface libre ou 2 si les deux parois sont rigides. Lorsque t_h est grand par rapport au temps de retournement des tourbillons, l'écoulement central quasi-bidimensionnel est peu influencé par le frottement et sa dynamique obéit aux équations de Navier-Stokes bidimensionnelles classiques.

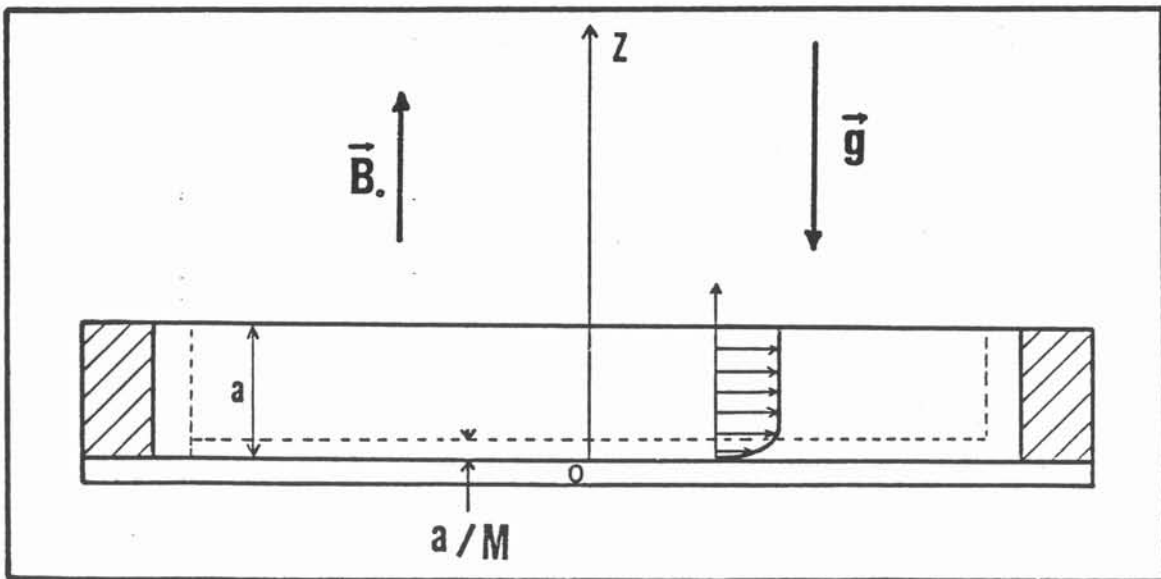


figure I-3

Réalisation d'un écoulement bidimensionnel dans une couche horizontale de mercure soumise à un champ magnétique uniforme et vertical.

- (1) couche de Hartmann
- (2) cœur de l'écoulement bidimensionnel

2-1. Création de l'Écoulement

On met en mouvement le mercure en faisant circuler des courants électriques entre des électrodes situées sur les parois. Le champ magnétique interagit avec les courants; des forces de Laplace créées au sein du fluide. L'étude du phénomène physique rendant bidimensionnels les écoulements entre parois isolantes, sans injection de courant, nous permet maintenant de voir que les courants vont se distribuer à l'intérieur du fluide de manière à éviter les décorrélations le long du champ magnétique: tout défaut ou excès de vitesse modifie la répartition des courants tendant à accélérer ou à freiner le liquide. La force de Laplace \bar{F} moyennée sur l'épaisseur de fluide et s'exerçant sur l'écoulement bidimensionnel est:

$$\bar{F}(x,y) = \frac{1}{a} \int_0^a \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 \, dz \quad (I-41)$$

En utilisant la loi de conservation du courant, on peut relier simplement le rotationnel de cette force au courant injecté à travers les électrodes:

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{a} \int_0^a \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0) \, dz = \frac{B_0}{a} \int_0^a (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{j}) \, dz$$

$$\text{d'où } \nabla \times \bar{F} = \frac{B_0}{a} (j_{z(z=0)} - j_{z(z=a)}) \quad (I-42)$$

Les forces sont par principe perpendiculaires à \mathbf{B}_0 et elles engendrent donc un écoulement bidimensionnel. L'énergie fournie concerne les nombres d'onde situés dans le plan orthogonal à \mathbf{B}_0 . L'écoulement forcé dissipe donc peu d'énergie par effet Joule et cette façon d'opérer est donc optimale pour notre utilisation. Cette façon de créer un écoulement dans le plan orthogonal au champ est analogue aux rangées de barreaux parallèles au champ utilisées dans les expériences de turbulence bidimensionnelle en conduite [Sukoriansky 1987]. Ici, nous pouvons contrôler la forme géométrique du forçage en répartissant des électrodes sur les parois transverses au champ magnétique. L'intensité du forçage est également bien maîtrisée. Nous soulignons le fait que la force calculée ici et s'exerçant sur l'écoulement bidimensionnel n'est pas la même que celle apparaissant dans l'équation initiale (I-1). Nous ne tenons compte ici que des forces supplémentaires dues à l'injection de courant. Les autres sont incluses dans le terme de frottement. Le cœur de l'écoulement obéit aux équations suivantes lorsqu'un courant est injecté:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_c}{\partial t} + (\mathbf{V}_c \cdot \nabla) \mathbf{V}_c = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{V}_c - \frac{\mathbf{V}_c}{t_h} + \bar{F}(x,y) \quad (I-43)$$

$\bar{F}(x,y)$ satisfaisant à (I-42)

2-2. Interprétation des Mesures de Potentiel Électrique

Les équations (I-30) et (I-33) montrent que les courants électriques aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des couches de Hartmann sont reliés au champ de vitesse de l'écoulement central; aussi est-ce tout naturellement que l'on pourra relier les mesures de gradients de potentiel électrique à la vitesse. On obtient en effet:

$$\nabla \phi = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \mathbf{V}_c \times \mathbf{B}_0 \quad (I-44)$$

L'hypothèse, M très grand devant 1, que nous avons faite pour séparer l'écoulement en deux régions nous permet alors d'écrire:

$$\nabla \phi = \mathbf{V}_c \times \mathbf{B}_0 \quad (I-45)$$

Nous donnerons des ordres de grandeurs de ces gradients de potentiel lorsque nous présenterons notre dispositif expérimental.

2-3. Forme Adimensionnelle

Les équations du mouvement (I-43) de nature bidimensionnelle s'écrivent de manière équivalente en équation de vorticité:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{\omega}{t_h} + \nu \Delta \omega + \frac{B_0}{\rho a} j_z(x, y) \quad (I-46)$$

Les termes de vitesse (de vorticité) ont des valeurs inconnues a priori. Par contre, nous contrôlons l'intensité du courant injecté I ; La taille de la cuve L donne une longueur caractéristique. Nous adimensionnalisons les équations de telle sorte que le terme source soit constant. On pose:

$$j_z(x, y) = \frac{I}{L^2} j_z^*(x, y)$$

$$t = L \sqrt{\frac{\rho a}{B_0 I}} t^*$$

et

$$Re = \frac{L}{\nu} \sqrt{\frac{B_0 I}{\rho a}} \quad (I-47)$$

$$Rh = \frac{1}{sL} \sqrt{\frac{a I}{B_0 \sigma \nu}} \quad (I-48)$$

L' quation (I-46) s'écrit alors sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla) \omega^* = -\frac{\omega^*}{Rh} + \frac{\Delta \omega^*}{Re} + j_z^*(x, y) \quad (1-49)$$

On remarquera que le courant adimensionnalisé vérifie:

$$\int_{cuve} |j_z^*(x, y, t)| \, ds = 2 \quad (1-50)$$

Chapitre II

STRUCTURES TOURBILLONNAIRES

BIDIMENSIONNELLES ISOLEES

Article écrit en collaboration avec J. Somméria (à paraître en juillet 1988 au Journal of Fluid Mechanics **192**, pages 175-192)

Experimental Characterization of Steady two-dimensional
vortex couples

Experimental characterization of steady two-dimensional vortex couples

By JEAN-MICHEL NGUYEN DUC AND JOËL SOMMERIA

Madylam, I.M.G., BP 95, 38402 Saint Martin D'Hères, France

(Received 8 April 1987 and in revised form 13 November 1987)

We study the evolution of unsteady two-dimensional vorticity structures surrounded by fluid at rest. The flow is initiated by a short fluid impulse in a horizontal layer of mercury and is constrained to be two-dimensional by a vertical uniform magnetic field. The impulse is generated by an electric pulse between two electrodes, and a flow circulation can be produced by diverting part of the current through the external frame. The velocity field is measured from the streaks of small particles floating on the free upper surface, and the vorticity is then obtained by means of an analytical interpolation and differentiation. The flow always evolves toward a set of independent steady structures with symmetry which are either circular vortices (monopoles) or couples (dipoles). The latter have a linear or circular steady motion depending on the flow circulation around them. The region of non-zero vorticity is always close to a circle. The steadiness is confirmed by plotting the vorticity versus the stream function in the frame of reference moving with the couple. We obtain a curve, as appropriate for a steady solution of the Euler equation. The slope of this curve is either constant or has no maximum. We suggest that this result could correspond to a general stability condition. The interaction between two symmetric couples at various angles of incidence yields two new couples by exchange of their vortices. Oscillations of the resulting couples are often damped by releasing a circular vortex.

1. Introduction

Isolated couples† of two-dimensional counter-rotating vortices with a fast translating motion have been known as steady solutions of the Euler equation since the 19th century. They have the remarkable property of transporting momentum and mass like a solid body does. The relevance of such couples to real fluid flows was clearly demonstrated in the two-dimensional wake behind a cylinder by Couder (1984). They can even dramatically dominate the whole wake when the cylinder oscillates (Couder & Basdevant 1986). These experiments were performed in a flat soap film, and similar results were obtained in a layer of mercury where three-dimensional perturbations are inhibited by a magnetic field (Papaliou 1985). Two-dimensional vortex couples were also observed in an ordinary wake behind a long cylinder by Williamson & Roshko (1986), but strong oscillations of the cylinder seem to be necessary for their observation. Vortex couples have motivated several works in geophysical fluid dynamics and are often called modons in this context. When they interact with turbulence, vortex couples are generally less stable than the circular vortices that are clearly observed in the oceans (McWilliams 1985) and in numerical

† We call a couple a set of two counter-rotating vortices to make the distinction with a set of two corotating vortices called a pair, following a suggestion of Couder & Basdevant (1986).

computations of two-dimensional turbulence (McWilliams 1984). They could nevertheless have a mixing role because of their ability to transport matter efficiently over long distances. Furthermore there is some hope for a theory of two-dimensional complex flows that considers simple vortex structures as elementary building blocks, like solitons for gravity waves (Flierl, Stern & Whitehead 1983). This idea was also conceived for drift wave turbulence in plasma physics (Makino, Kamimura & Taniuti 1981), which can be approximated by the same equations as quasi-geostrophic flows.

Different analytical and numerical steady translating solutions of the two-dimensional Euler equations are described in the literature. The simplest one is a set of two point vortices, which can be considered as an extremely loose couple. By contrast a very compact couple is described by Lamb (1945) (also by Batchelor 1967) and has some analogy with the spherical Hill vortex: the vorticity is proportional to the stream function inside a circle and vanishes outside. A similar solution was found for an asymmetric couple moving steadily on a circle by Flierl *et al.* (1983). A family of couples made of two areas of uniform vorticity separated by an arbitrarily small gap has also been studied by Deem & Zabusky (1978) and Pierrehumbert (1980). Finally, more complex couples have been obtained numerically by McWilliams & Zabusky (1982) and McWilliams (1983). These steady translating solutions are found to be stable to small (two-dimensional) perturbations in numerical computations, but the theory of their stability remains to be done. Different authors have proposed that the stable structures emerging from a complex unsteady flow with enstrophy (vorticity squared) dissipation should have the minimum total enstrophy compatible with a given value of some conserved quantities, like energy and momentum. Leith (1984) has calculated the corresponding vorticity distribution for circular vortices, but no similar calculation has been done for couples.

We have studied the structure of vortex couples emerging from a complex unsteady flow. The experiments are performed in a horizontal layer of mercury submitted to a uniform vertical magnetic field. A short jet is created by the electromagnetic force due to a pulse of electric current between two electrodes. The three-dimensional perturbations are quickly damped (in a fraction of a second) by the eddy currents and the flow becomes independent of the vertical coordinate, outside a thin Hartmann boundary layer at the bottom. This complex unsteady two-dimensional flow then evolves more slowly and generates a steady vortex couple with possibly one or two circular isolated vortices. Similar experiments were performed by Flierl *et al.* (1983) by injecting a short water jet in a rotating tank, where three-dimensional structures are suppressed by the Coriolis force. In both cases the two-dimensional regime is not affected by the external force except for a fairly weak linear friction, due to the effect of viscosity in the bottom boundary layer. However the dynamics of the initial three-dimensional stage is different, and so is the resulting two-dimensional unsteady flow. Moreover, we are able to measure the vorticity field with a reasonable precision ($\approx 10\%$) from flow visualization by a method described in §3. General constraints due to the conserved quantities are discussed in §4.1. Couples with a given momentum but no global rotation are obtained when the whole current is flowing from one electrode to the other, and these are studied in §4.2. Flows with non-zero circulation are described in §4.3 when part of the current returns through the outer frame. Finally, interactions between two vortex couples are described in §5.

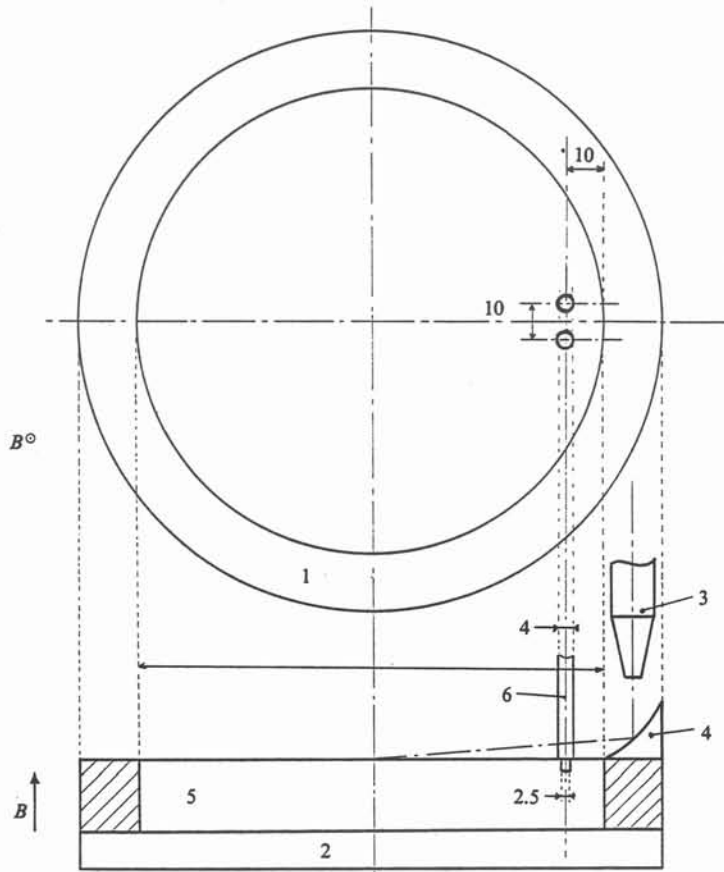


FIGURE 1. Sketch of the apparatus: 1, copper frame; 2, insulating bottom; 3, optical fibres for the illumination; 4, cylindrical mirror; 5, mercury; 6, electrodes. Dimensions are in mm.

2. Experimental apparatus

The apparatus is a circular box 16 cm in diameter, containing a horizontal layer of mercury, 2 cm in depth. The choice of this depth is the result of an optimization: the three-dimensional perturbations are better suppressed when the layer is shallower, but the Hartmann friction in the bottom boundary layer then has more influence (Sommeria & Moreau 1982). The box is located inside a long vertical solenoid producing a steady vertical magnetic field $B = 0.38$ T. The spatial uniformity of this field is better than 1%. The box is made of an electrically insulating bottom (in ertalon) and a copper ring, chemically coated with nickel for protection against mercury. The upper surface is free (in contact with pure argon to avoid oxidation) but its vertical deformation is negligible. The typical velocity is of the order of 10 cm/s, which corresponds to a Reynolds number of 10^4 . Pulses of electrical current are introduced through two fixed copper electrodes (figure 1). A second identical pair of electrodes can be located anywhere around the box in order

to simultaneously produce a second vortex couple and study the interaction with the other one at different angles of incidence.

All flow measurements are made from the photographic streaks of small silica particles (50 μm in diameter) floating on the free upper surface. For each run a sequence of photos is taken at intervals of 0.5 s with a time of exposure of 0.1 s. The light is carried by two beams of optic fibres and spread in nearly horizontal sheets by two cylindrical mirrors (figure 1). Seen from above, the particles then appear bright on a black background. The meniscus of the mercury surface must be concave to avoid the falling of the particles on the edge. This concave meniscus is obtained by coating the lateral walls with a thin layer of electrolytic gold. This layer is quickly dissolved but the underlying nickel is then wetted by mercury. An excellent electrical contact is also obtained by this technique and the same coating is used for the electrodes.

3. Velocity and vorticity measurements

The flow is measured from the length and orientation of short particle streaks (approximated as straight segments), using a method described by Nguyen Duc & Sommeria (1985). The velocity field is obtained by the tedious process of pin-pointing the two ends of each streak on a large digitizing table connected to a computer. The image is obtained by a direct projection of the negative film about 1 m in size and the precision of the process is about 2% of the maximum velocity. The sense of each vector is chosen by continuity, and by looking at the global motion of the flow structure. The next step is to interpolate the velocity field between the points of measurement in order to compute the vorticity and to get the velocity vectors on a square lattice. Particular care is brought to the interpolation method to optimize the use of our laboriously acquired data. Different computer programs were tested by generating velocity vectors of the analytically defined vortex couple of Lamb (1945) at random locations and comparing the interpolation with the original field. A method called 'spline thin shell' developed by Paihua Montes (1978) appeared to be especially good. The interpolating function for each velocity component is an analytical expression, the coefficients of which are calculated in order to minimize the second-order derivatives. The interesting features of this method are that it (i) avoids spurious oscillations (unlike polynomial interpolations), since the spline interpolation is a function with minimum second derivatives; (ii) is completely independent of the axes x and y that we choose; and (iii) gives the exact measured value at the measurement points wherever they are located (the method can be modified to account for a given uncertainty of the measurements but we did not use this option).

The two interpolated velocity components v_1 and v_2 at any point $M(x, y)$ are calculated by the relations

$$v_j(M) = a_j + b_j x + c_j y + \sum d_j(i) MM_i^2 \ln MM_i^2 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

where MM_i is the distance between M and one of the N points of measurement M_i . The first three terms correspond to a least-square linear fit for each velocity component. The coefficients $d_j(i)$ are calculated by solving the linear system of N equations obtained by applying (1) to the N measurement points. Equation (1) can

be analytically differentiated to yield the vertical component of vorticity ω and the divergence at any point:

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}. \quad (3)$$

The measured divergence field is weak and appears to be independent of the flow structure, which means that it results mostly from experimental errors. Since divergence and vorticity are computed by a similar process, the typical errors on these two fields should be the same. Therefore the typical error on the vorticity must be of the same order as the measured divergence. To get an estimation of the relative error on the vorticity, we normalize the divergence measured at each point of the calculation grid by a typical magnitude of the vorticity. This typical magnitude is defined as half the difference between the maximum and minimum vorticity in the vortex couple $\frac{1}{2}(\omega_{\max} - \omega_{\min})$. The values of this normalized divergence, obtained at each grid point, are partitioned in bins, and the probability of occurrence in each bin is plotted in a histogram (figures 4f and 8f). We see on these figures that for 95 % of the points the measured divergence is smaller than $0.1 \frac{1}{2}(\omega_{\max} - \omega_{\min})$, so that the relative error on the vorticity can be estimated as less than 0.1 for 95 % of the grid points. We should notice that the best accuracy is obtained when the measurement points are evenly scattered. Indeed, when two streaks are very close, a small error in each streak measurement can lead to large relative error in the difference, hence a large error in the vorticity. Beside the small errors of measurements, a few mistakes are sometimes made (for instance the wrong direction for a velocity vector). These mistakes are immediately detected by the strong local extremum in a plot of the divergence isovalues, and are then corrected.

The stream function ψ is computed from the vorticity field by a numerical integration of the Poisson equation

$$\nabla^2 \psi = -\omega. \quad (4)$$

The domain of integration is a rectangle which extends well outside the region of vorticity to avoid edge effects. The boundary condition on this rectangle is $\psi = 0$. A grid of 30×30 points is found to be sufficient for this computation. The stream function in a frame of reference translating or rotating with the couple can be then calculated by a simple transformation:

$$\text{translation} \quad \psi \rightarrow \psi - U_x y + U_y x,$$

$$\text{rotation} \quad \psi \rightarrow \psi + \Omega O M^2,$$

where U_x and U_y are the two components of the translation velocity, and Ω the rotation rate around a centre O .

4. Generation of a vortex couple

4.1. General comments

A flow impulse is generated by a current pulse of intensity I between 6 and 10 A and duration $\tau = 0.3$ s, sufficiently short to get a local flow surrounded by fluid at rest. A dip of the free surface with small-scale structures is then observed between the two electrodes during less than one second, revealing a strong three-dimensional motion.

However, these perturbations disappear quickly and a much smoother and slower two-dimensional flow replaces it. This process should occur in a time of the order of $\rho/\sigma B^2(a/L)^2$ for a turbulent structure of horizontal scale L , according to Sommeria & Moreau (1982) (a denotes the thickness of the mercury layer, ρ the density of the fluid, and σ its conductivity). This estimation yields for example a time 1 s for a scale L of 5 mm, so that most of the kinetic energy should be indeed in the two-dimensional modes of motion after one second. The only effect of the magnetic field is then a friction force, due to the Hartmann boundary layer on the bottom, proportional to v/t_H where $t_H = a/B(\rho/\sigma\nu)^{1/2} = 16.6$ s. This is much larger than a turnover time (typically less than 1 s) and the only dynamical effect of this friction is an overall decay of all the quantities related to the velocity field (illustrated on figure 7). We did not check the two-dimensionality by direct measurements but all our results agree well with an interpretation using the two-dimensional Navier-Stokes equations, as did some previous experiments obtained with different forcing in a similar kind of apparatus (Sommeria 1986; Verron & Sommeria 1987).

The two-dimensional flows in unbounded fluid at rest at infinity are constrained in the limit of vanishing viscosity by the conservation of the following integral quantities (see Batchelor 1967):

$$\Gamma = \iint \omega \, dA,$$

$$\mathbf{P} = \iint \mathbf{r} \omega \, dA,$$

$$\mathbf{M} = \iint r^2 \omega \, dA,$$

$$E = \iint \psi \omega \, dA.$$

The enstrophy $V = \iint \omega^2 \, dA$ is also conserved in the absence of viscosity. However, in a two-dimensional turbulent flow, the enstrophy is transferred to small scales by a cascade process, and is dissipated by viscosity, even in the limit of vanishing viscosity. When $\Gamma = 0$, (as in §4.2) $\mathbf{P}, \mathbf{M}, E$ are equal respectively to the momentum, angular momentum and energy of the flow (divided by $a\rho$). This interpretation of the quantity \mathbf{P} must be clarified when we take into account the effect of the boundaries, supposed far from the vorticity region. Indeed, since the centre of mass of the fluid as a whole does not move, the total momentum is actually always zero. The momentum of the localized flow is exactly balanced by the momentum of a weak irrotational flow necessary to satisfy the boundary conditions of zero normal velocity. This irrotational flow can be considered as due to fictitious image vortices outside the box and should have a negligible influence on the dynamics when the couple is far from the walls. When $\Gamma \neq 0$ (as in §4.3) the angular momentum and energy tend to infinity with the box diameter and the physical meaning of \mathbf{P}, \mathbf{M} is different. \mathbf{P}/Γ indicates the position of the 'centre of vorticity' and \mathbf{M}/Γ is a measure of the spatial extension of the vorticity distribution. The conservation of these two quantities means that the vorticity distribution cannot move away from its region of production. This constraint is illustrated by the circular motion of the vortex couples with non-zero circulation.

The current density \mathbf{j} associated to the electric pulse produces locally a force per unit of volume $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ during the time τ . By integrating this force in the fluid volume,

we can calculate the total momentum initially generated, $P = IBd\tau/\rho a$, perpendicular to the line joining the two electrodes (d is the distance separating the two electrodes). The actual momentum of the jet is in fact typically five times smaller, and can make a small angle with this direction. Therefore an important part of the initial momentum is dissipated in the strongly perturbed three-dimensional initial stage.

When a part cI of the current pulse returns through the frame, a non-zero circulation exists at large distance, proportional to the non-zero current flux. By integrating the driving force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ on a vertical cylinder surrounding the two electrodes, we can indeed relate the total circulation produced around the vorticity region to the flux of current density cI , $\Gamma = cIB\tau/\rho a$. The actual circulation measured in the two-dimensional regime is typically four times smaller, so there is also a strong decrease of the circulation in the initial stage of motion.

The velocity scale U and size L of an isolated vortex couple without circulation can be expressed as a function of E and P :

$$U = E/P, \quad L = P/E^{\frac{1}{2}}.$$

The direction of translation is determined by the direction of \mathbf{P} , and the position of the trajectory by M/P . At that point any structure and shape is compatible with any initial value of these conserved quantities. However, the enstrophy of the steady couple must be smaller than the enstrophy of the initial two-dimensional state. In the general case with non-zero circulation the structure is constrained by the 'parameter of asymmetry', which can be defined as $g = \Gamma^2/E$.

4.2. Couples without circulation

We report in this section the results obtained when no current is passing through the frame, so that the initial circulation due to the forcing vanishes. The flow can behave in different ways, depending on the turbulent fluctuations in the initial three-dimensional stage. However, in all cases the system clearly evolves toward a set of isolated steady vorticity structures. The formation of a symmetric translating couple without circulation is the most common situation. This couple has a line of symmetry along the direction of translation and another in the perpendicular direction. Its formation is often associated with the release of one or two circular vortices (figure 2). The direction of translation is generally roughly perpendicular to the line joining the two electrodes but exceptions exist. The couple sometimes has a small circulation, so that it is slightly asymmetric in the transverse direction and moves on a circle of large radius, but we shall leave these cases for the next section.

An easy way to check the steadiness is to plot the position of the two vortex cores at successive times, as in figure 3. After a transitory stage of a few seconds, the distance between the two cores is constant within 5% until the couple arrives close to the external frame, where it increases because of the influence of the image vortices. At a very close distance two new vortices are produced by a boundary-layer detachment from the wall, which gives the impression that the images 'come out of the wall'. A similar process was observed for single vortices by Sommeria (1988). As a consequence of these effects, a complex flow, localized near the wall, is produced and no couple is reflected: in other words the interaction with the wall is completely inelastic. Far enough from the external frame, the mean motion is a straight steady translation, but fluctuations are not quite damped before the couple reaches the lateral wall. Similar oscillations were observed in numerical computations

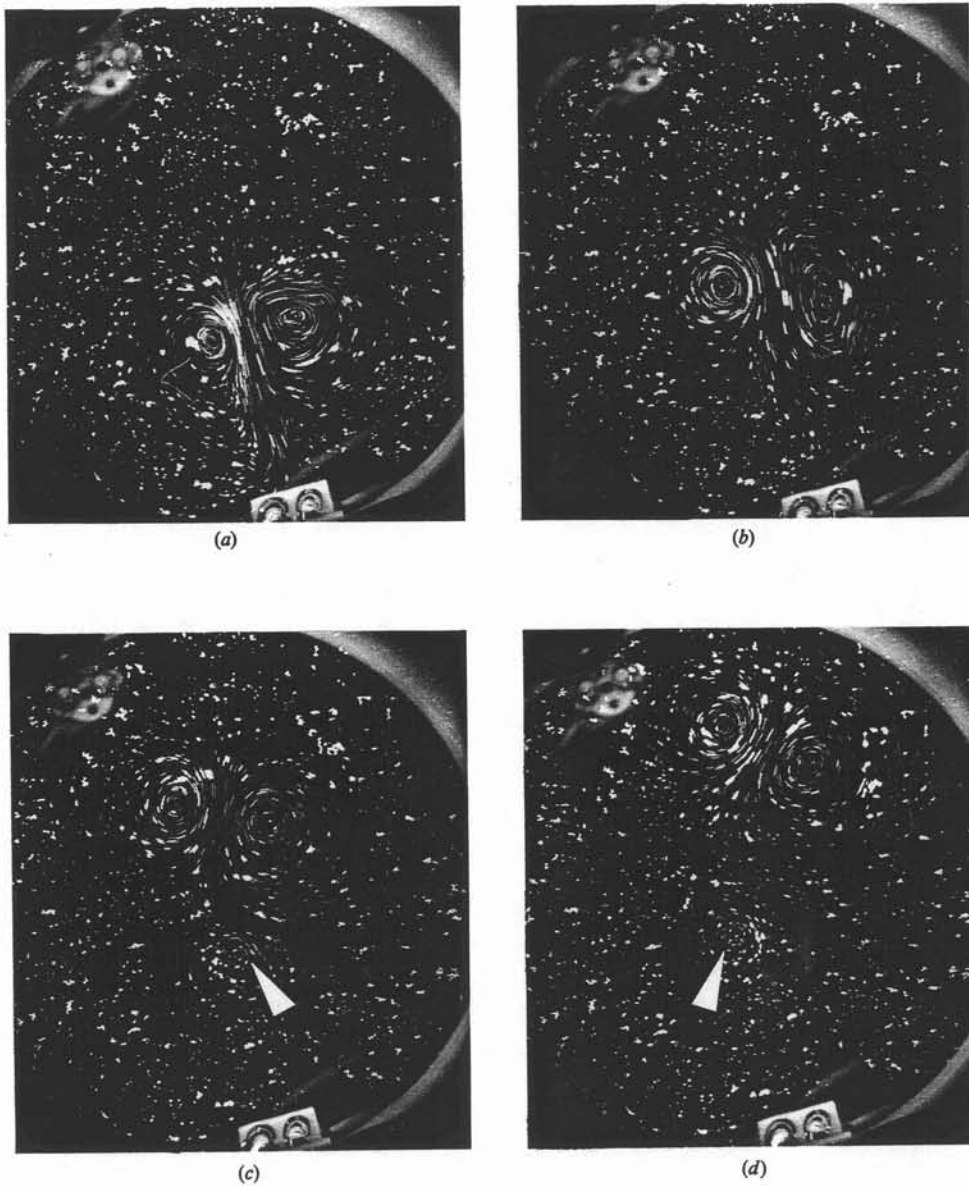


FIGURE 2. The evolution toward a symmetric couple. The photos are taken at times (a) $t = 1$ s, (b) 2 s, (c) 5 s, (d) 7 s after the current pulse. The circular isolated vortex is shown by the arrow. Time of exposure 0.1 s.

(McWilliams 1983). The effect of Hartmann friction is also observed but has only a small influence during the time it takes for the couple to cross the box.

The properties of the couples change from one run to another, even when the initial current pulse is identically reproduced. The flow evolution is determined in the strongly unstable initial stage of motion. The distance between the two vortex centres in the laboratory frame of reference is typically between 1.5 and 2.5 cm and

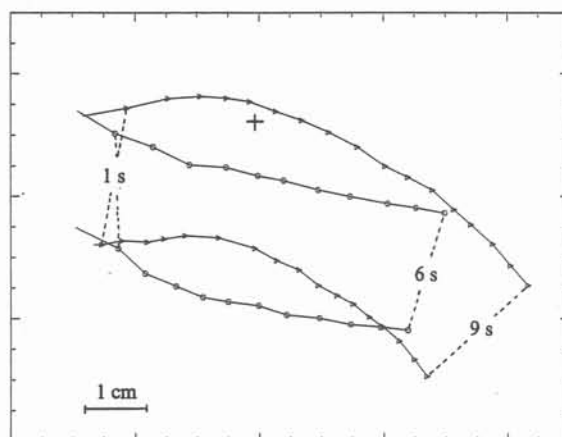


FIGURE 3. Successive positions at intervals of 0.5 s of the two vortex centres for couples without circulation; the elapsed times from the electric pulse to the first and last displayed positions are indicated; the cross corresponds to the box centre; Δ , couple of figure 2; \circ , couple analysed in figure 4.

the speed of translation is between 1 and 2 cm/s. The ratio of the velocity at the middle of the couple in the laboratory frame of reference to the speed of translation is a characteristic of the shape and vorticity structure. This ratio can have any value between 2.8 and 4, revealing that different shapes and structures are possible for the couple. The small values correspond to a couple somewhat elongated in the direction of translation while the large ones correspond to an elongation in the perpendicular direction. However, because of the limited precision for the measurement of this ratio (5%), we cannot exclude the possibility of a discrete set of stable states instead of a continuous one.

The measured velocity field of a symmetric couple is represented in the laboratory frame of reference in figure 4(a). The arrows are limited to the vortex region, where an appreciable velocity can be measured. Outside this region, a few scattered points with zero velocity are introduced in the digitizing process, but cannot be seen on figure 4(a). The result of the interpolation on a periodic grid is represented on figure 4(b). The streamlines in the reference frame translating with the couple are shown in figure 4(c), and the shape of the couple can be defined by the boundary between the open streamlines and the closed ones. The corresponding vorticity field is shown in figure 4(d). Each point of measurement is represented in figure 4(e) using its stream function ψ and vorticity ω as coordinates. The points collapse approximately on a curve with two branches, one of which is on the ψ -axis and corresponds to the irrotational flow outside the couple. This behaviour corresponds to what is expected for the steady solutions of the Euler equations. This result is thus a direct proof that we are close to a stationary state and provides an experimental determination of the structure function $\omega = f(\psi)$, which is linear in this example. The linearity is not uncommon but other relations are obtained as well with other examples and are discussed in the next section. The dispersion of the points is somewhat larger than the experimental errors inferred from the divergence histogram (figure 4f), which is due to the existence of the oscillations.

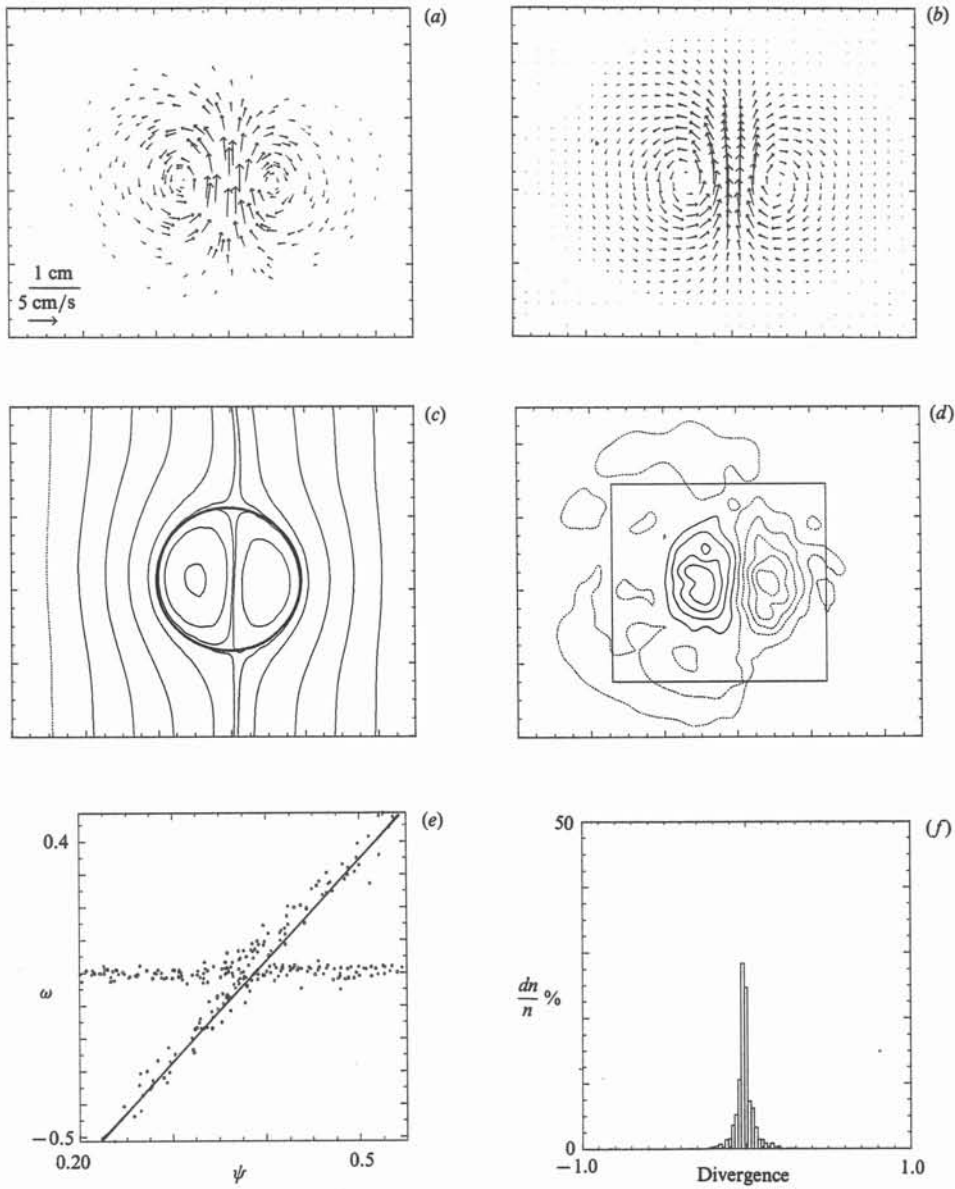


FIGURE 4. Numerical processing of a couple with a negligible circulation (factor of asymmetry $g = 0.022$): (a) velocity vectors corresponding to the streaks; (b) interpolated velocity; (c) streamlines in the frame of reference translating with the couple (at speed 1.41 cm/s), the boundary of the closed streamlines is indicated; (d) iso-vorticity lines (interval 2.6 s^{-1} , the dashed lines correspond to negative values); (e) representation with (ω, ψ) -coordinates in the translating frame of reference (inside the square in d); (f) histogram of the divergence (normalized by $\frac{1}{2}(\omega_{\max} - \omega_{\min})$).

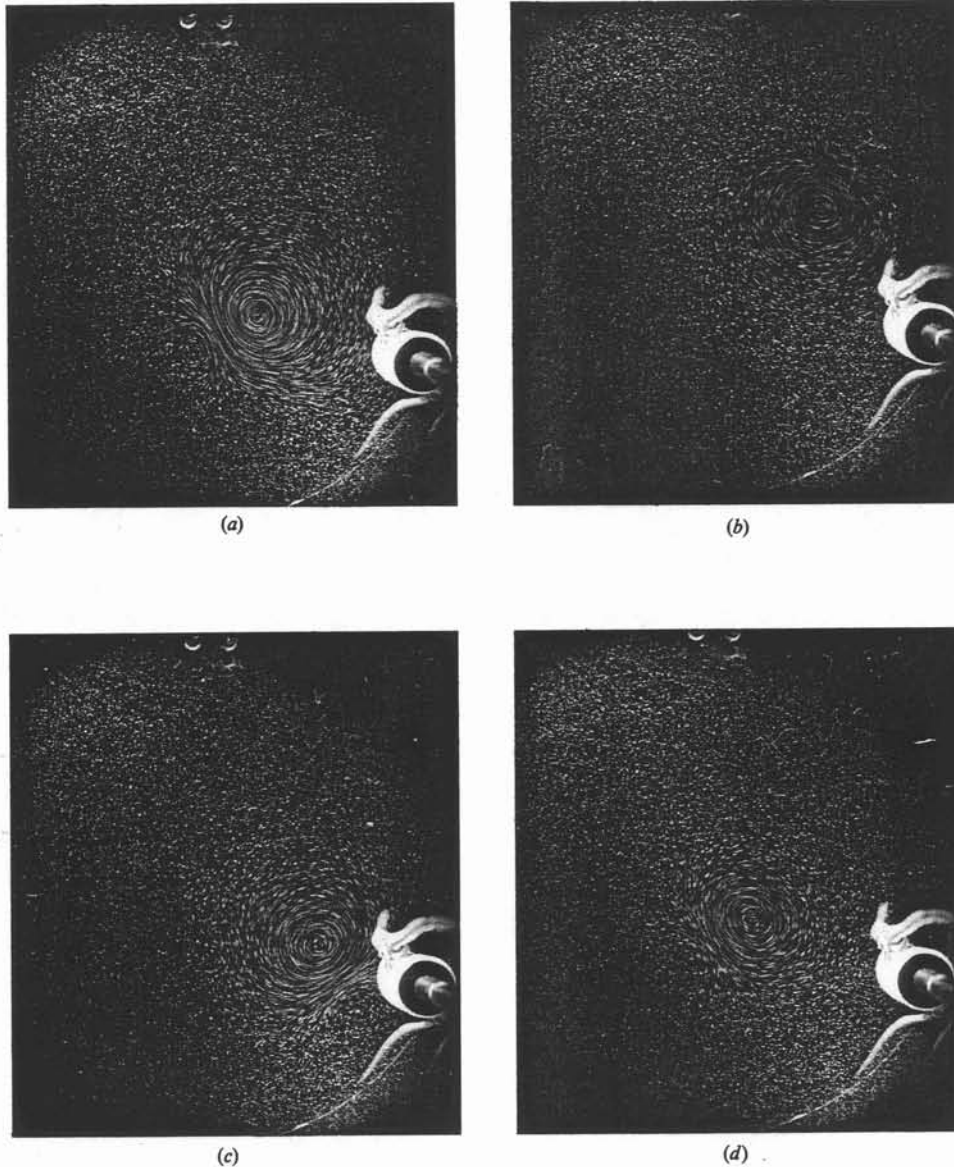


FIGURE 5. The evolution toward a couple with non-zero circulation. The photos are taken at times (a) $t = 1$ s, (b) 4 s, (c) 7 s, (d) 10 s after the current pulse. Time of exposure 0.1 s.

4.3. Couples with circulation

We now consider the strongly asymmetric couples obtained when a part cI of the electric current returns through the frame. A typical evolution is shown on figure 5 and examples of trajectories are plotted on figure 6. These couples reach a steady state more quickly than the symmetric ones, probably because of the vorticity mixing due to their rotation, and no circular vortex is released. Furthermore the couple can be followed for much longer times because the circular trajectory never

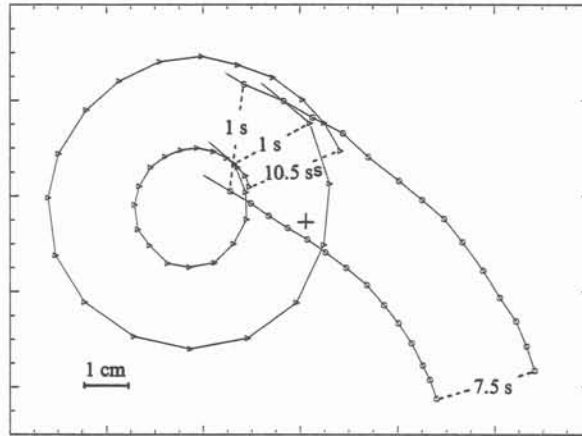


FIGURE 6. Successive positions at intervals of 0.5 s of the two vortex centres for couples with a circular motion. Same indications as in figure 3. \triangle , corresponds to figure 5; \circ , is analysed in figure 9(b).

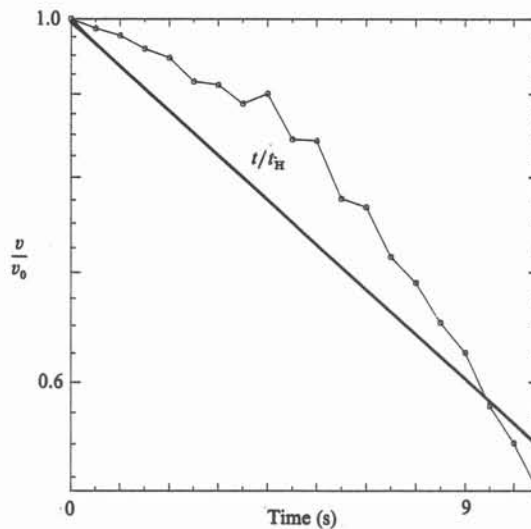


FIGURE 7. Evolution of the angular velocity of the couple motion showing the Hartmann decay (couple of figure 5).

reaches the external frame. The motion is slowly damped by the Hartmann friction as shown in figure 7. The mean dissipation rate corresponds well to the laminar value t_H^{-1} , as could be expected from Sommeria (1988), but the decay is in fact slower at the beginning and faster later. This discrepancy can be explained by the influence of the image vortices behind the lateral walls. Notice that the decay does not produce an inward spiralling motion as in the results of Couder & Basdevant (1986). This latter feature must be due to a different law of dissipation that modifies the shape of the couple.

While the couples can be strongly asymmetric in the transverse direction, a good symmetry is always observed about the line joining the two vortex cores. An example of velocity, stream function and vorticity field is shown on figure 8. The

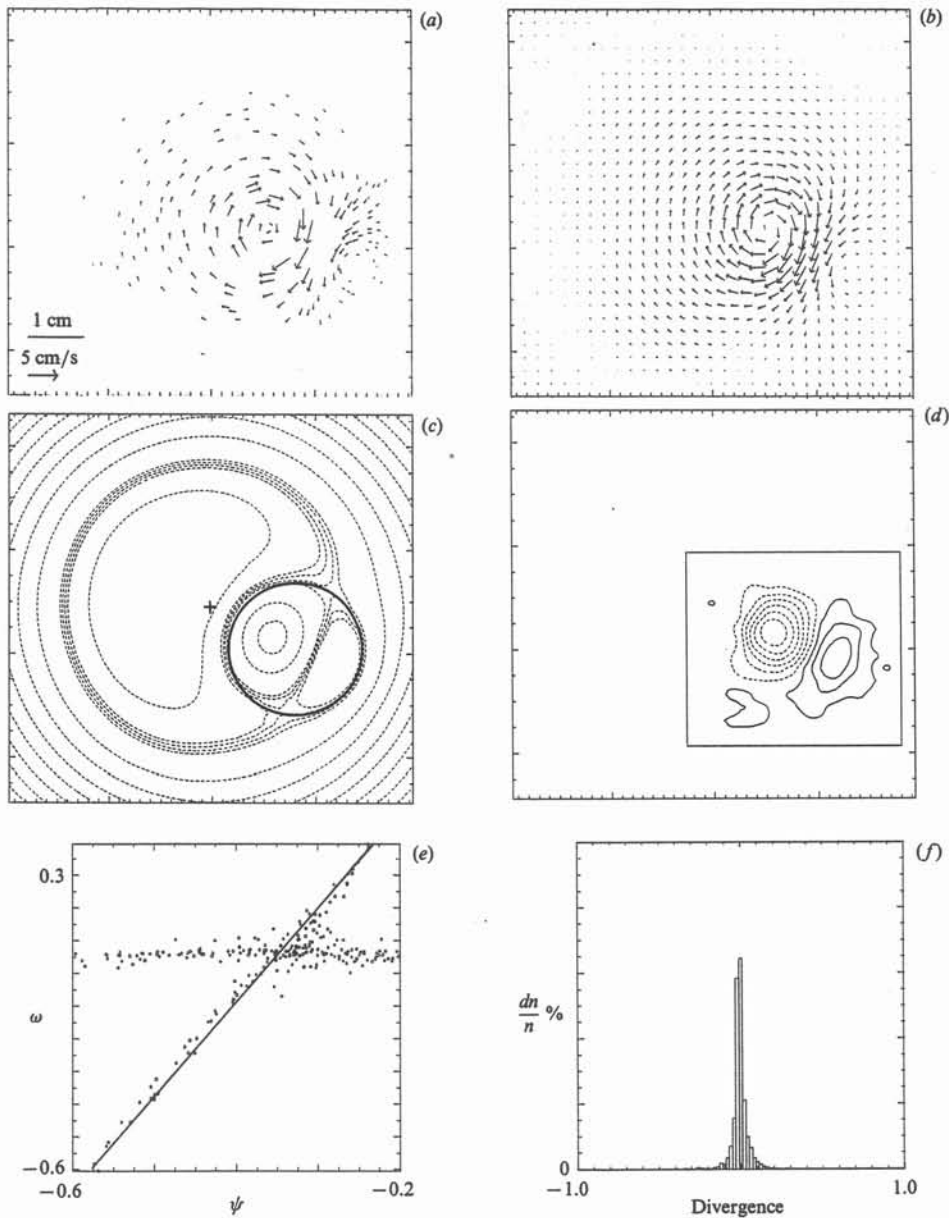


FIGURE 8. Analysis of a couple with non-zero circulation (the one of figure 5, $g = 1.02$) in the same way as in figure 4. (a) velocity field; (b) interpolated velocity; (c) streamlines in a frame of reference rotating with the couple around the centre, indicated by the cross, at angular velocity 0.68 rad/s ; (d) isovorticity lines at interval 2.32 s^{-1} ; (e) representation with (ω, ψ) -coordinates; (f) histogram of the divergence normalized by $\frac{1}{2}(\omega_{\max} - \omega_{\min})$.

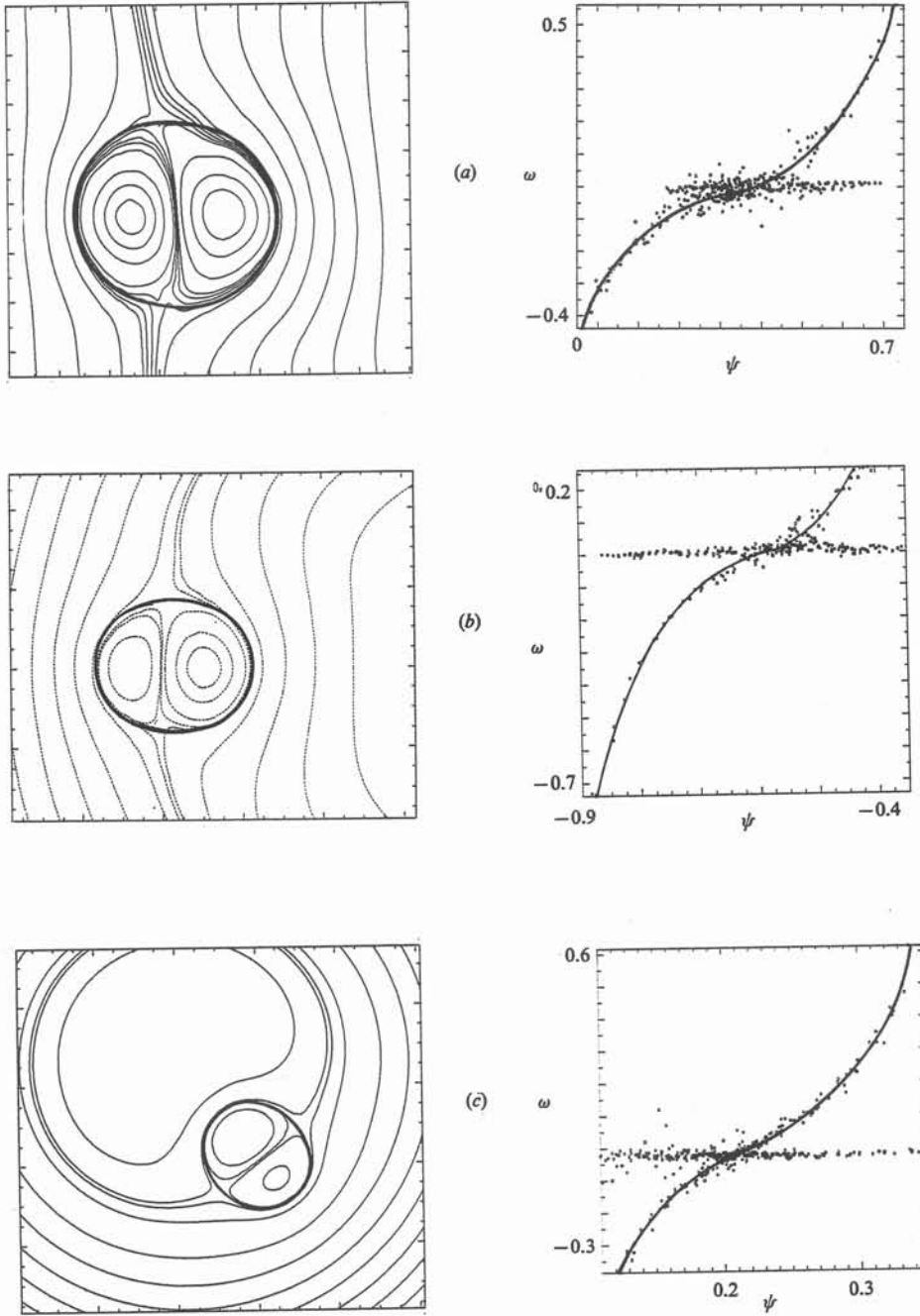


FIGURE 9. Streamlines in the frame of reference where the couple is stationary (left) and relation ψ, ω (right) for three examples with a nonlinear function f . (a) $c = 0$, $g = 0.09$ (couple of figure 2), isoline interval $0.05 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$; (b) $c = 0.11$, $g = 0.19$, isoline interval $0.125 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$; (c) $c = 0.2$, $g = 0.566$, isoline interval $0.17 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

relation between ω and ψ is defined more precisely than for the couples without circulation, which confirms that the oscillations are weaker. The relation between the stream function and vorticity is linear in this case but other functions can also be obtained, as for couples with zero circulation. The shape of this particular couple is circular within the measurement errors, so that the flow corresponds to the analytical solution of Flierl *et al.* (1983). The circle represented in figure 8(c) has a radius b such that $kb = 3.83$ ($J_1(kb) = 0$), where $\omega = k\psi$, corresponding to the boundary of the couple in the analytical solution. The experimental boundary fits well with a circle of such radius. The parameter $e = b/A$, where A is the radius of the trajectory of the circle centre, is equal to 0.66 in this example. However other values of this parameter can be obtained, depending on the run.

Examples of shape and nonlinear vorticity structures are given in figure 9 for different asymmetry factors. Different relations $\omega = f(\psi)$ can be obtained. The asymmetry factor g increases as the proportion c of the current diverted to the lateral walls is increased. Nevertheless, there is a variability of the flow structure due to instabilities in the strongly perturbed initial stage of motion, as for couples with zero circulation.

In spite of this variability of the function $f(\psi)$, we always find that the derivative f' is maximum at the singular points corresponding to the two vortex cores, but has no local maximum elsewhere (but has a minimum for $\omega = 0$). This property is also observed for the couples obtained in the numerical experiments of McWilliams (1983), and in recent numerical simulations of forced two-dimensional turbulence by Legras, Santangelo & Benzi (1988). It seems therefore to be a quite general feature of vortex couples emerging in a complex two-dimensional flow. We cannot determine whether this property is a consequence of the initial conditions, or whether it corresponds to a general stability criterion. The second alternative could provide an explanation for the common occurrence of couples with a linear function f . Indeed a couple with a maximum of f' would be unstable and evolve until a state of marginal stability is reached, corresponding to a constant f' . However we cannot test this hypothesis experimentally since we cannot control the initial vorticity distribution. According to this hypothetical criterion, couples formed by two patches of uniform vorticity, with slightly smoothed boundaries would be unstable, since the function f' has then a strong maximum at the edge of the patches. The stability of couples with patches of uniform vorticity has been shown in the numerical simulations of Overman & Zabusky (1982), but the boundaries of the patches correspond to a discontinuity for the vorticity and the function f . Therefore this result is not in contradiction with our hypothesis. A theorem stating that a steady inviscid two-dimensional flow is always stable if f' is negative everywhere was derived by Arnol'd (1965), but it applies only in a confined domain, so that there is also no contradiction with our hypothesis for isolated vorticity structures.

5. Interaction between vortex couples

The vortex couples can be considered as particles whose interactions we want to study. For that purpose we generate simultaneously two vortex couples at two sets of electrodes (figure 1) with an identical current pulse of 9 A lasting 0.3 s. We select the runs for which the two couples have a straight translating motion and collide near the centre of the box. The size and speed of the two couples is then similar (but not precisely equal). The angle of incidence is chosen (by moving one electrode couple around the box) to be either 90°, 120° or 180°. The collision is also characterized by

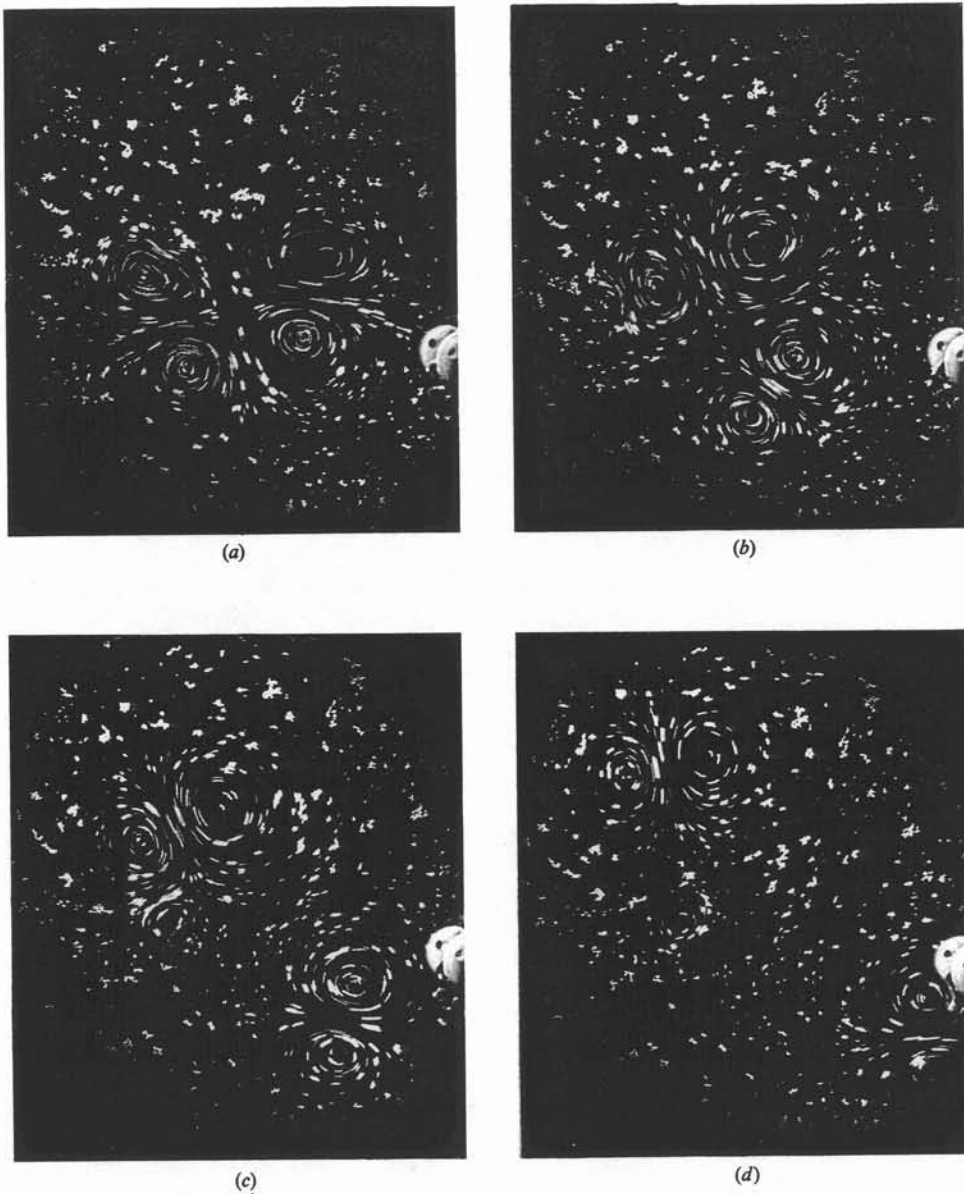


FIGURE 10. An interaction between two translating couples at an angle of incidence 120° . The successive photos are taken at the times (a) $t = 1$ s, (b) 2.5 s, (c) 4 s, (d) 5.5 s after the electric pulses. Time of exposure 0.1 s.

the impact parameter (distance normal to the trajectory at the interaction point) but this quantity cannot be controlled because of variations of the trajectory directions due to the initial turbulence.

In spite of these random differences between the various runs some features are quite reproducible. The interaction produces two new couples resulting from the exchange of the vortices as seen on figure 10. For head-on collisions, the two new

couples are very similar to the initial ones but turned through 90° . For an angle of incidence of 120° the couple produced on the side of the small angle is compact while the second one is loose. This effect is still more important for a smaller angle of incidence (90°). A similar behaviour was also obtained by Couder & Basdevant (1986) in numerical computations and experiments with soap film. We observe again the tendency of the couples to eliminate the fluctuations and reach a symmetric state by releasing a circular vortex. The variation of energy and enstrophy during the interaction corresponding to figure 10 is less than the typical experimental error ($\approx 10\%$). The enstrophy dissipation during this interaction seems then to be small, but the precision and the number of cases that we were able to process are too limited to allow a general conclusion.

6. Conclusions

We have first confirmed by new examples that our experimental method makes possible the quantitative investigation of two-dimensional flows at high Reynolds numbers ($\approx 10^4$). Furthermore we are able to measure the vorticity field from particle streaks with a precision better than 10% of its maximum value. We should emphasize the importance of the interpolation process for this achievement, as we learned from several attempts with different standard methods.

We find that a two-dimensional vorticity distribution surrounded by fluid at rest always evolves in a few turnover times towards a set of independent steady structures, which are couples or single circular vortices. This result is obtained both from the evolution of a fluid impulse, and from the intermediate state produced during the encounter of two couples. It seems thus to be quite general. The steady state is actually obtained for couples with circulation, but oscillations around a steady state are present in couples without circulation. A line of symmetry joining the two vortex centres is always obtained. Couples without circulation are also symmetric about the direction of translation. It seems that each structure attains the highest symmetry compatible with the conserved quantities.

The shape of the couples (i.e. the boundary of the vorticity region) is always close to a circle but can be elongated either in the direction of translation or in the perpendicular one. The function $\omega = f(\psi)$ which characterizes the steady state is either linear or is such that the derivative f' always has singular maxima at the vortex cores, but no local maximum elsewhere. Further study is needed to decide whether this quite general property is related to a stability criterion, or is just a consequence of the nature of the initial conditions.

The initial purpose of these experiments was to create an hypothetical kind of two-dimensional turbulence, considered as a 'gas' of vortex couples with infrequent interactions. This goal was not possible to achieve because of the absence of reflection of the couples on the external frame. We have observed that the interaction between two compact couples generates two new couples but one of them is sometimes very loose and could probably be easily broken by another interaction. However, vortex couples also have a tendency to be produced from any isolated vorticity structure, so it is not clear whether a dilute gas of vortex couples would be stable even without the destruction near the walls.

The authors have benefited from useful discussions with Y. Couder, S. A. Maslowe and K. Moffatt. The numerical code for the spline interpolations was kindly given by D. Creutin.

REFERENCES

- ARNOL'D, V. I. 1966 Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non-linéaire. *J. Méc.* **5**, 29–41.
- BASDEVANT, C., LEGRAS, B., SADOURNY, R. & BELAND, M. 1981 A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability. *J. Atmos. Sci.* **38**, 2305–2326.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*, section 7.3. Cambridge University Press.
- COUDER, Y. 1984 Solitary vortex couples in two-dimensional wakes. *J. Phys. Lett. Paris* **45**, 353–360.
- COUDER, Y. & BASDEVANT, C. 1986 Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.* **173**, 225–251.
- DEEM, G. S. & ZABUSKY, N. J. 1978 Vortex waves: Stationary V-states, interactions, recurrence and breaking. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 859–862.
- FLIERL, G. R., STERN, M. E. & WHITEHEAD, J. A. 1983 The physical significance of modons: laboratory experiments and general integral constraints. *Dyn. Atmos. Oceans* **7**, 233–263.
- LAMB, H. 1945 *Hydrodynamics*, p. 245. Dover.
- LEGRAS, B., SANTANGELO, P. & BENZI, R. 1988 High resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence. *Europhys. Lett.* **5**, 37–42.
- LEITH, C. E. 1984 Minimum enstrophy vortices. *Phys. Fluids* **27**, 1388–1395.
- MCWILLIAMS, J. C. 1983 Interaction of isolated vortices II. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **24**, 1–22.
- MCWILLIAMS, J. C. 1984 The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **146**, 21–43.
- MCWILLIAMS, J. C. 1985 Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Rev. Geophys.* **23**, 165–182.
- MCWILLIAMS, J. C. & ZABUSKY, J. N. 1982 Interactions of isolated vortices I. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **19**, 207–227.
- MAKINO, M., KAMIMURA, T. & TANIUTI, T. 1981 Dynamics of two-dimensional solitary vortices in a low- β plasma with convective motion. *J. Phys. Soc. Japan* **50**, 980–989.
- NGUYEN DUC, T. & SOMMERIA, J. 1985 Etude de Tourbillons bidimensionnels à partir de visualisations. In *Visualisation et Traitement d'Images* (ed. G. Cognet & J. Mallet), pp. 85–91. INPL, Nancy, France.
- OVERMAN, E. A. & ZABUSKY, N. J. 1982 Coaxial scattering of Euler equation translating V-states via contour dynamics. *J. Fluid Mech.* **125**, 187–202.
- PAIHUA MONTES, L. 1978 Methodes numériques pour le calcul de fonctions-spline à une ou plusieurs variables. Thèse de 3^e cycle, Université de Grenoble, France.
- PAPALIOU, D. D. 1985 Magneto-fluid mechanic turbulent vortex street. In *4th Beer-Sheva Seminar on MHD flows and turbulence*, *AIAA Progress series*, vol. 100, pp. 152–173.
- PIERREHUMBERT, R. T. 1980 A family of steady translating vortex pairs with distributed vorticity. *J. Fluid Mech.* **99**, 129–144.
- SOMMERIA, J. 1986 Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.* **170**, 139–168.
- SOMMERIA, J. 1988 Electrically driven vortices in a strong magnetic field. *J. Fluid Mech.* **189**, 553–569.
- SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1982 Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *J. Fluid Mech.* **118**, 507–518.
- VERRON, J. & SOMMERIA, J. 1987 Numerical simulation of a two-dimensional turbulence experiment in magnetohydrodynamic. *Phys. Fluids* **30**, 732–739.
- WILLIAMSON, C. H. K. & ROSHKO, A. 1986 Vortex dynamics in the wake of an oscillating cylinder. *Bull. Am. Phys. Soc. II* **31**, 1690.

Chapitre III

INSTABILITES D'UN RESEAU DE TOURBILLONS

1. Présentation

2. Dispositif Expérimental

2-1. Description géométrique de la cuve

2-2. Contrôle de la dynamique de l'écoulement

2-2-1. Champ magnétique

2-2-2. Alimentation des électrodes exitatrices

2-3. Mesure des gradients de potentiel

2-3-1. Sondes de mesure

2-3-2. Amplification

2-3-3. Acquisition

2-3-4. Traitement des signaux

2-4. Visualisations

3. Déstabilisation du réseau de tourbillons

3-1. Étude Détaillée des Divers Régimes

3-1-1. Le Régime Stationnaire

3-1-2. Voisinage du seuil de Déstabilisation

3-1-3. Apparition du chaos

3-1-4. Réapparition d'un régime périodique

3-1-5. Retour vers le chaos

3-2. Synthèse et interprétation

3-2-1. Bifurcation de Hopf

3-2-2. Résonance de l'onde instable et de l'écoulement forcé

3-3. Les Modèles Théoriques

4. Les régimes à forts Rh avec la paroi hexagonale

1. Présentation

La théorie classique de la stabilité hydrodynamique a une restriction majeure touchant la nature de l'écoulement de base. Elle est limitée aux écoulements unidirectionnels et permanents; le problème se ramène alors en principe à un problème aux valeurs propres d'une équation différentielle ordinaire. Le cas des écoulements quasi-parallèles ou quasi permanents semble accessible mais en dehors du cadre de ces hypothèses l'extension est encore insurmontée.

Une ouverture est apparue avec l'étude des écoulements possédant une périodicité spatiale. Le cas des écoulements parallèles spatialement périodiques avait déjà attiré l'attention. L'analyse utilisée a été étendue aux cas de réseaux carré et triangulaire de tourbillons bidimensionnels. La stabilité d'écoulements tridimensionnels du type Beltrami ou ABC a également été traitée par plusieurs chercheurs.

Peu de travaux expérimentaux peuvent venir soutenir les résultats théoriques. Cela vient de la difficulté à créer une force ayant une périodicité spatiale. L'approche par la magnétohydrodynamique est intéressante. Bondarenko et Col. (1979) créent des écoulements périodiques plans en utilisant un électrolyte soumis à un champ magnétique périodique en espace et parcouru par un courant uniforme. Un pavage carré de tourbillons a été étudié par Somméria (1986) avec un dispositif analogue au nôtre. Il a été noté plusieurs fois qu'un écoulement, "moins anisotrope" que les deux types d'écoulement que l'on vient de citer, devait se déstabiliser de manière différente. Nous avons donc entrepris d'étudier un écoulement périodique à symétrie hexagonale.

Du point de vue pratique, notre procédé expérimental ne pose pas de difficulté pour forcer un écoulement ayant une géométrie complexe. Il suffit de disposer convenablement un réseau d'électrodes sur le fond de notre cuve. Un tourbillon bidimensionnel centré sur chacune des électrodes sera créé en vertu de (I-42). La simplicité des capteurs de vitesse - il suffit de deux petites électrodes - permet la mesure simultanée en plusieurs points du champ de vitesse. Cet accès à la structure spatiale de l'écoulement sans faire intervenir des techniques de visualisation est un atout certain pour l'étude envisagée. Cette remarque n'est pas en contradiction avec le choix de la méthode de mesure du chapitre II: En effet, les écoulements que nous voulons étudier maintenant sont géométriquement plus complexes et instationnaires. Dans ce cas il est hors de question actuellement de faire des statistiques avec les champs de vitesse obtenus par digitalisation d'images.

La déstabilisation complète du réseau de tourbillons peut conduire à un écoulement turbulent. La turbulence bidimensionnelle a été étudiée de façon intensive numériquement car sa simulation est moins gourmande en mémoire et en temps cpu que la simulation tridimensionnelle. Des écoulements à nombres de Reynolds suffisamment grands pour avoir une zone inertielle peuvent ainsi être étudiés à l'aide de simulation numérique directe. Elle n'a été que relativement peu abordée expérimentalement. Plusieurs points restent encore très flous, en particulier ceux qui concernent la cascade inverse d'énergie.

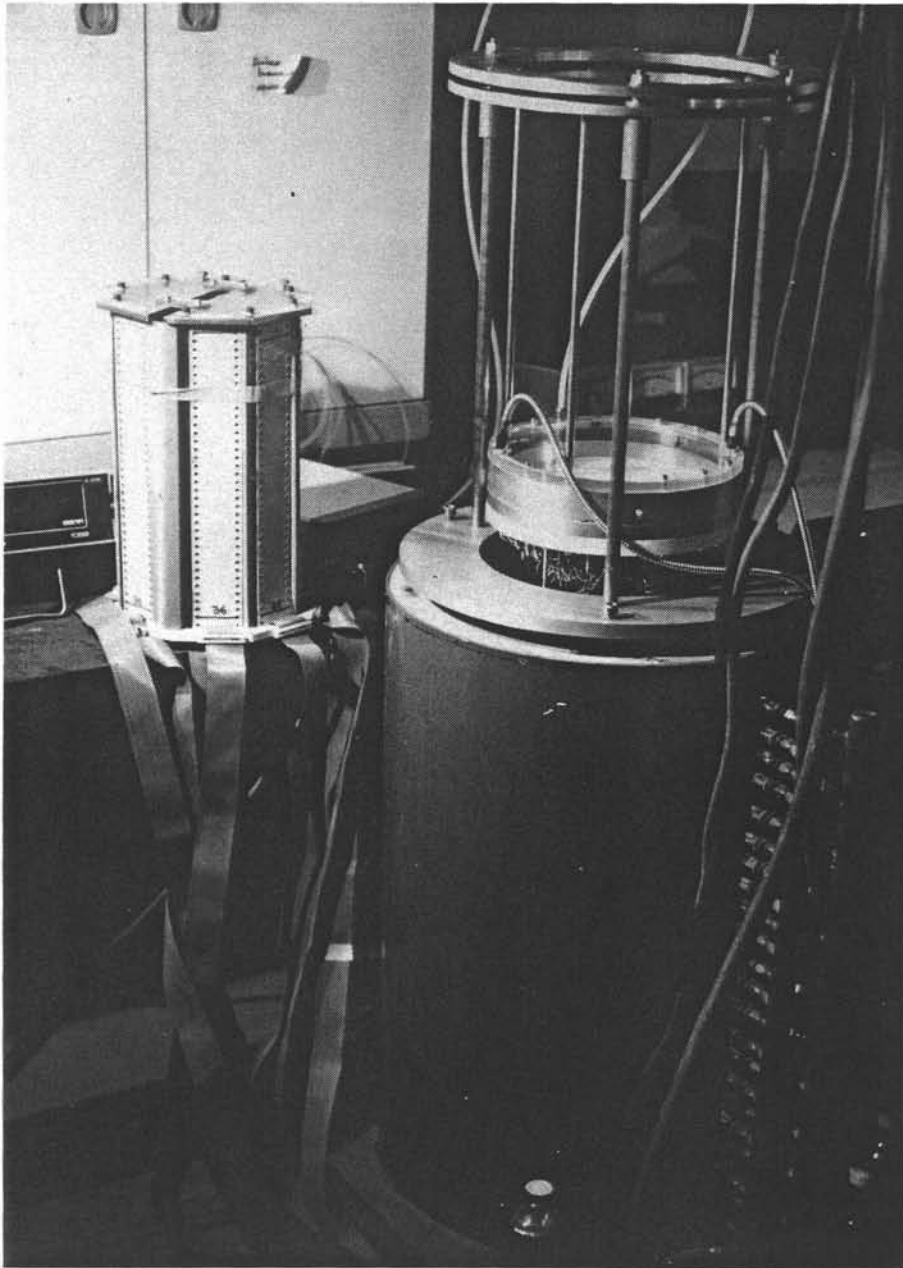


figure III-1 a

Vue d'ensemble du dispositif expérimental

La cuve contenant le mercure est au dessus de l'ouverture du solénoïde. A gauche on voit le boîtier de résistances permettant de distribuer le courant de façon uniforme dans chacune des électrodes.

2. Dispositif expérimental

Le mercure a été utilisé dans de nombreuses expériences pour étudier les écoulements MHD à l'échelle du laboratoire. Cela ne veut pourtant pas dire qu'il est facile à manipuler. C'est le seul métal, excepté le Gallium, à être liquide aux températures ordinaires. Sa conductivité est relativement élevée bien que près de 100 fois inférieure à celle du cuivre; elle dépasse cependant très largement celle des électrolytes. Cette propriété lui a assuré un succès durable dans l'histoire de la MHD.

Pourtant, le mercure possède une agressivité chimique; il s'oxyde lorsqu'il est en contact avec l'air; il réagit avec bon nombre de métaux courants; il peut être absorbé par l'organisme et provoquer des troubles nerveux très graves.

Nous présentons un dispositif expérimental original apportant des solutions pour le conditionnement et incluant des techniques variées.

A première vue le dispositif expérimental pourrait se scinder en quatre parties [Figure III-1 a]:

- le solénoïde créant le champ magnétique
- la cuve contenant le mercure
- l'alimentation électrique de la cuve
- la chaîne de mesure

On s'apercevra qu'en fait il est impossible de décrire séparément chacun des éléments du montage; champ de vitesse à l'intérieur du fluide, champ magnétique, courants injectés et gradients de potentiel sont étroitement imbriqués. Il apparaît cependant que la cuve, avec le mercure, est le centre de ces interactions.

2-1. Description géométrique de la Cuve

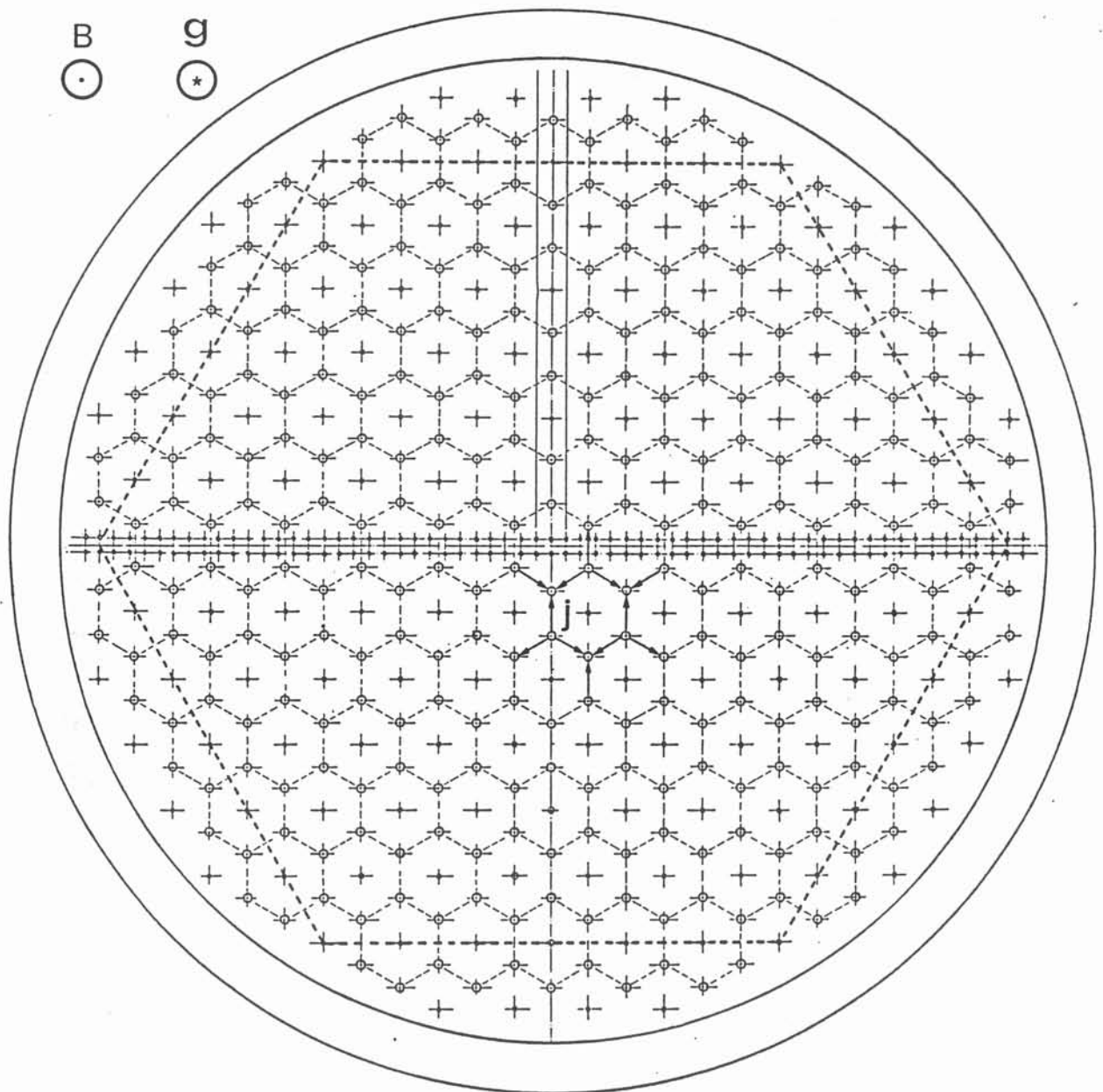
Le mercure est confiné dans une cuve de paroi circulaire de diamètre intérieur 0.26 mètre ou hexagonale [figure III-1 b et c]. Les parois latérales sont faites d'une couronne circulaire ou hexagonale de cuivre. L'épaisseur de la couche horizontale de mercure peut atteindre jusqu'à 2 cm. La cuve est fermée dans sa partie supérieure par un couvercle en plexiglas; nous pouvons visualiser entièrement la surface supérieure du mercure. Cette dernière est soit libre, et en contact avec de l'argon pur pour éviter l'oxydation, ou rigide lorsque l'oxydation de la surface a eu lieu. Le fond est constitué par une plaque d'Ertalon de 30 mm d'épaisseur. Il supporte les réseaux d'électrodes d'injection de courant et d'électrodes de mesure.



figure III-1 b

Vue du fond de la cuve et de la paroi latérale

Le fond de la cuve supporte l'ensemble des électrodes servant à la mise en mouvement du mercure ainsi que les électrodes de mesure. La paroi latérale est en cuivre.



- Electrodes servant à l'injection du courant
- Electrodes de mesure du potentiel électrique
- Position relative de la paroi hexagonale

figure III-1

Une grande attention a été portée à la réalisation de la pièce afin que sa géométrie soit respectée. Le fond est rectifié après l'installation des électrodes puis soigneusement poli afin de limiter les perturbations de la couche limite. Notons aussi que toutes les pièces conductrices, de cuivre (paroi latérale) ou de laiton (électrodes), sont protégées de l'agressivité du mercure par un dépôt électrolytique ou chimique de Nickel de 50 μm d'épaisseur.

2-2. Contrôle de la dynamique de l'écoulement

2-2-1. Champ Magnétique

La cuve est logée dans le cœur d'un solénoïde produisant un champ magnétique uniforme et vertical B_0 . Son intensité B_0 peut atteindre 0.25 tesla. Les fluctuations provenant du générateur de courant restent inférieures à 0.05 %. L'homogénéité dans la zone centrale utilisée est de 0.2 %.

2-2-2. Alimentation des Electrodes Excitatrices

Un réseau périodique hexagonal de 282 électrodes affleurantes, réparties en un nombre égal de sources et de puits de courant électrique est aménagé dans le fond de la boîte [Figure III-1 et III-2]. Chacune des électrodes de forçage à un diamètre de 2.5 mm. Le côté d'un hexagone mesure 11.55 ± 0.05 mm.

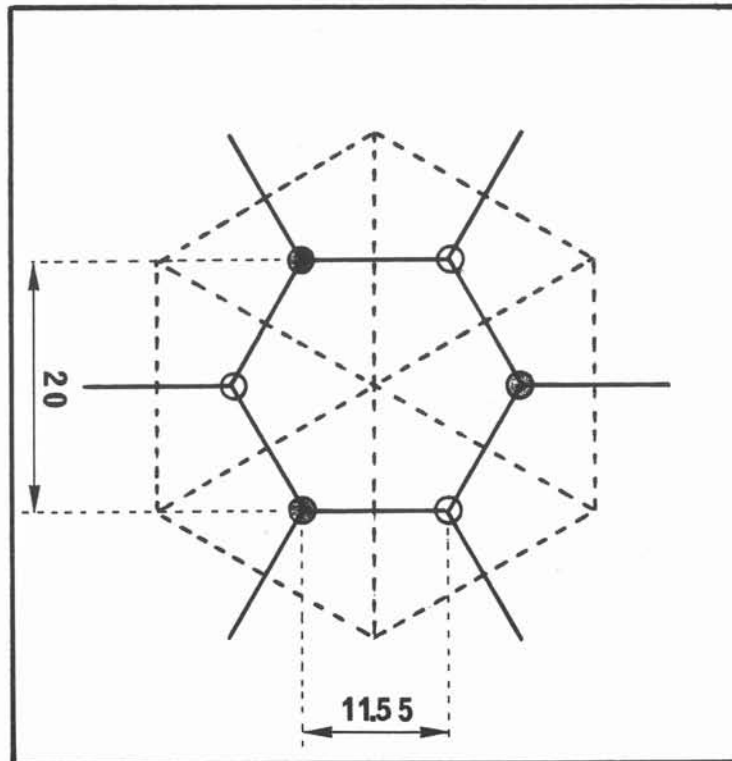


figure III-2

Le courant est distribué de façon uniforme dans chaque électrode à travers deux réseaux de 141 résistances SFERNICE de 2.21Ω (à 5×10^{-3}). Chaque résistance est montée en série avec une électrode d'injection de courant. Comme ces résistances sont grandes devant les résistances de contact, le courant passant dans chaque électrode est également réparti. De plus on évite que les courants induits dans le mercure ne bouclent à travers le réseau d'injection. Nous pouvons vérifier que l'alimentation est correcte en mesurant les différences de potentiel aux bornes de chaque résistance, ou plus globalement entre les pôles plus et moins et la masse.

L'alimentation est faite de deux manières:

-la première consiste à utiliser le même générateur pour alimenter la bobine créant le champ magnétique et les électrodes excitatrices. L'ensemble résistances plus électrodes est schématisé par une résistance R qui est connectée en série avec le solénoïde. Elle est faible devant celle du solénoïde. Une résistance variable est branchée en parallèle avec R pour régler le courant total injecté dans la cuve indépendamment du courant passant dans la bobine. On peut ainsi atteindre un courant total de 150 A avec une précision relative égale à 10^{-2} .

-La deuxième consiste à prendre un générateur indépendant moins puissant mais plus précis; il délivre jusqu'à 20 A avec une précision de 10^{-3} .

2-3. Mesure des gradients de potentiel

2-3-1. sondes de mesure

Nous mesurons le potentiel électrique ϕ avec 126 électrodes de diamètre 0.8 mm. Réparties en 2 rangées disposées de part et d'autre d'un diamètre de la cuve elles forment un réseau carré avec une longueur de maille de 4 mm.

On montre dans le paragraphe (1-2-2) que la différence de tension mesurée entre deux de ces électrodes est reliée directement à la vitesse débitante entre les deux points.

$$\nabla \phi = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Nous obtenons donc, avec un champ magnétique uniforme, les deux composantes de la vitesse suivantes:

$$u_x = -1/B_0 \partial \phi / \partial y$$

$$u_y = 1/B_0 \partial \phi / \partial x$$

Nous pouvons effectuer les mesures de potentiel électrique soit en mode commun, soit en mode différentiel. La première méthode permet d'établir des cartes de potentiel permettant de calculer la fonction de courant. L'autre mode de connexion donne directement accès aux deux composantes du champ de vitesse le long d'un axe de mesure.

La taille des électrodes de mesure n'est pas négligeable devant leur écartement; ceci

est une source d'erreur appréciable. L'espacement des électrodes sur la ligne de mesure résulte d'un compromis entre localité de la mesure et différence de potentiel détectable. Remarquons cependant que l'on dispose de 2,5 points de mesure par longueur d'onde du réseau d'injection; le nombre d'onde correspondant à l'échelle du forçage est donc parfaitement déterminé.

2-3-2. Amplification

a. Nécessité

Avec les conditions usuelles :

- un champ magnétique $B_0 = 2500$ Gauss
- une vitesse typique $V_0 = 0.1$ m/s

la différence de potentiel entre deux électrodes successives est :

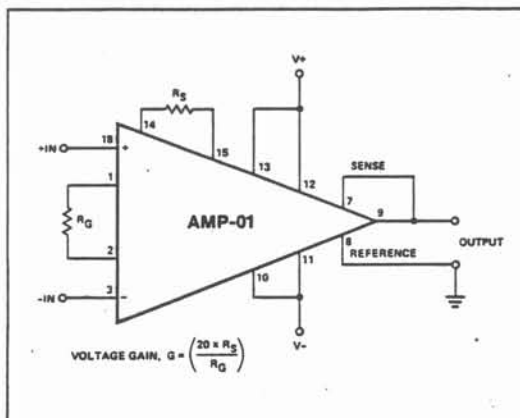
$$\Delta\phi_0 = 100 \mu V.$$

Il est donc nécessaire d'amplifier les signaux avant même de les transmettre ou de les multiplexer.

b. Réalisation

Nous avons conçu et réalisé un appareil effectuant l'amplification simultanée de 64 signaux. Le nombre élevé d'entrées nous oriente obligatoirement vers un système composé de modules identiques en parallèle les plus simples possibles. Nous avons donc choisi de construire chaque module d'amplification autour d'un amplificateur d'instrumentation Precision Monolithics Incorporated AMP01E.

Le schéma de base est le suivant:



Basic AMP-01 connections for gains 0.1 to 10,000.

figure III-3

c. Performance et stabilité

Les qualités requises du montage amplificateur sont les suivantes:

-Gain élevé, précis et stable au cours du temps : En effet chaque sonde est connectée à un amplificateur différent; il est important que tous les signaux soient multipliés par un même coefficient.

-Stabilité relative à la température : Les caractéristiques des composants, tensions d'offset en entrée ou sortie d'amplificateur, gain sont fonctions de la température; cette dernière peut fluctuer de façon assez importante lors de la mise sous tension des amplificateurs ou même ne serait-ce qu'à cause des fluctuations journalières de la température ambiante. Un dispositif de mise à zéro automatique des tensions d'offset existe; il est cependant trop lourd pour être installé sur 64 amplificateurs. La solution choisie est d'enregistrer les tensions d'offset sur toutes les voies de mesure avant et après une série de mesures, et de soustraire l'offset moyen obtenu sur chaque voie lors du traitement des signaux.

-Les échelles temporelles caractérisant la turbulence que nous étudions sont extrêmement longues par rapport au temps caractéristique des amplificateurs. Nous ne sommes donc pas limités par les réponses en fréquence.

Grandeurs caractéristiques:

Gain :

$$G = 8727$$

$$\Delta G = 2\%$$

Dérive de la tension d'offset en sortie d'amplificateur:

$$\Delta V = 1.3 \text{ mv}/^{\circ}\text{C}$$

2-3-3. Acquisitions

Le multiplexage et l'acquisition des signaux sont effectués par une carte DATA-TRANSLATION DT5714 + DT3752, installée à proximité de l'expérience. Elle possède 64 entrées en mode commun programmables. Après multiplexage nous pouvons encore appliquer un gain de 1-2-4-8 programmable, permettant d'utiliser au mieux les 14 bits de dynamique.

Les données expérimentales ainsi numérisées sont alors envoyées dans le réseau de miniordinateur APOLLO pour stockage sur disque dur et ultérieurement sur bandes magnétiques.

Remarque:

De grandes précautions doivent être prises lors de la mise à la masse et à la terre du dispositif expérimental et des appareils de mesure. Le générateur de puissance débite sous 250 V alors que les signaux de mesure en entrée d'amplificateurs sont de l'ordre de 10^{-6} V. Pour conserver la symétrie du réseau d'électrodes d'injection, il faut que le potentiel de la paroi latérale soit intermédiaire entre le potentiel des électrodes + et des électrodes -. D'autre part, la tension en mode commun à l'entrée des amplificateurs doit être aussi proche que possible de la masse. Pour éviter les bouclages, les masses de tous les appareils, analogiques et numériques, et les blindages des cables sont réunis en un seul point.

2-3-4. Traitement des signaux

L'enregistrement simultanée de 64 signaux apporte à la fois richesse d'informations et complexité. De plus, nous pouvons choisir la répartition spatiale des points de mesure. Nous avons réalisé un programme de traitement gérant les résultats disponibles en fonction de la disposition des sondes.

Le premier module de ce programme s'occupe de la maintenance des fichiers d'acquisition:

- Enregistrements des valeurs d'offsets
- Suppression ou inversion des mesures sur certaines voies
- Modifications de paramètres
- Calcul de coefficients adimensionnels ou dimensionnels à partir des paramètres enregistrés au moment de l'acquisition.

La deuxième partie, beaucoup plus importante, comprend le calcul et la présentation de valeurs typiques. On entend par valeurs typiques toutes les informations instantanées ou locales, moyennées dans le temps ou l'espace permettant de caractériser le plus simplement possible l'écoulement étudié. Une règle sur les notations utilisées permettra de reconnaître les quantités affichées tout au long des prochains paragraphes.

Nous indiquerons par 1 les quantités se référant à des mesures de vitesse longitudinale, par 2 celles se rapportant à la vitesse transverse. Nous utiliserons le symbole " — " pour les moyennes temporelles et " < > " pour les moyennes spatiales. A certains moments, nous travaillerons sur les variations temporelles des signaux; les grandeurs calculées à partir des fluctuations seront écrites avec une minuscule.

L'analyse des signaux est propre à l'étude de chaque phénomène. Nous présenterons chacune des opérations effectuées au moment de leur utilisation.

2-4. Visualisation

Une autre façon d'étudier l'écoulement de la couche de mercure consiste à observer le mouvement à la surface. Remarquons tout de suite qu'elle est limitée aux configurations à surface libre.

La technique utilisée est la trajectographie. Nous observons le déplacement de petites particules flottant sur la surface et suivant le mouvement du fluide. (on suppose que le glissement fluide-particule est négligeable). L'éclairage de la surface libre ne peut pas être improvisé: la cuve est dans le solénoïde et le fluide réfléchit toute illumination directe. Nous avons donc inclus dans le dispositif quatre miroirs supportés par la couronne de cuivre. Un nombre égal de fibres optiques conduisent la lumière depuis un générateur jusqu'à chaque miroir. Les faisceaux lumineux sont ensuite renvoyés tangentiellement à la surface de l'écoulement. Seules les particules émergent et sont éclairées. Avec un temps de pose convenablement choisi les traces lumineuses laissées par le passage des particules peuvent être converties en vitesses locales et conduisent au champ de vitesse instantané.

3. Déstabilisation du réseau de tourbillons

L'étude de la transition a été menée avec une paroi hexagonale ainsi qu'avec une paroi circulaire. Aucune différence qualitative n'a été remarquée en ce qui concerne la phase de transition.

3-1. Présentation détaillée des divers régimes

La balance entre effets déstabilisants et stabilisants est régie par un nombre sans dimension, le nombre Rh défini en (I-48), qui est proportionnel à la racine carrée du courant total injecté I . Pour suivre la transition vers la turbulence dans ce réseau de tourbillons nous avons choisi de travailler avec la composante de vitesse transverse; des essais préliminaires ont montré que les fluctuations relatives étaient plus grandes dans ce mode de mesure.

3-1-1. Le Régime Stationnaire

Lorsque l'écoulement est faiblement forcé, c'est à dire aux petites valeurs du paramètre Rh , l'écoulement est stationnaire. Il est important de bien connaître l'écoulement de base pour voir à quels nombres d'onde est excité l'écoulement.

L'étude détaillée de l'écoulement créé par une seule électrode d'injection de courant placée au centre d'une cuve de géométrie circulaire a été réalisée par Somméria (1985). Le champ de vitesse peut être calculé en tenant compte de la viscosité et du diamètre de l'électrode. Nous décrirons ici simplement les 282 tourbillons comme la superposition de points vortex de circulation $\pm \Gamma$ situés sur chaque électrode et dont le sens de rotation est fonction du signe de l'électrode. La circulation $|\Gamma|$ se calcule en supposant que les vortex sont en équilibre sous l'action des forces électromagnétiques dues au courant injecté et des forces de frottement dues aux couches de Hartmann [Figure III-4]. La force moyennée sur l'épaisseur s'exerçant sur une partie élémentaire du fluide située à une distance r du centre de l'électrode est:

$$\mathbf{F}(r, \theta) = \frac{1}{a} \int_0^a \mathbf{f}(r, z, \theta) dz = \frac{1}{a} \int_0^a \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 dz$$

soit

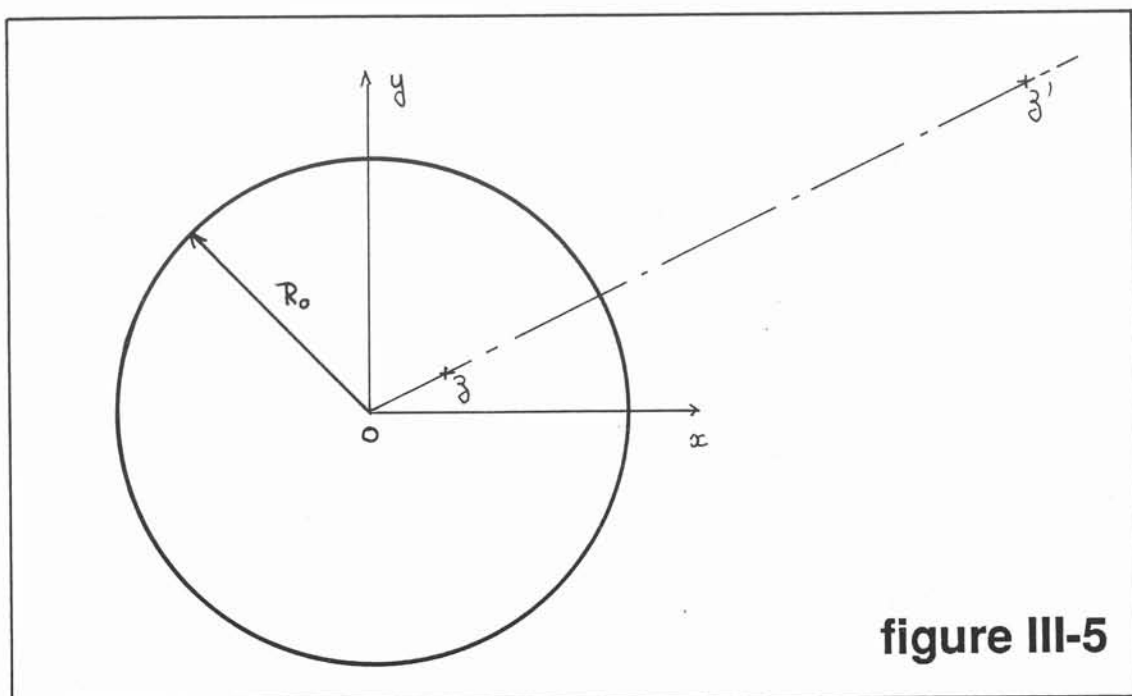
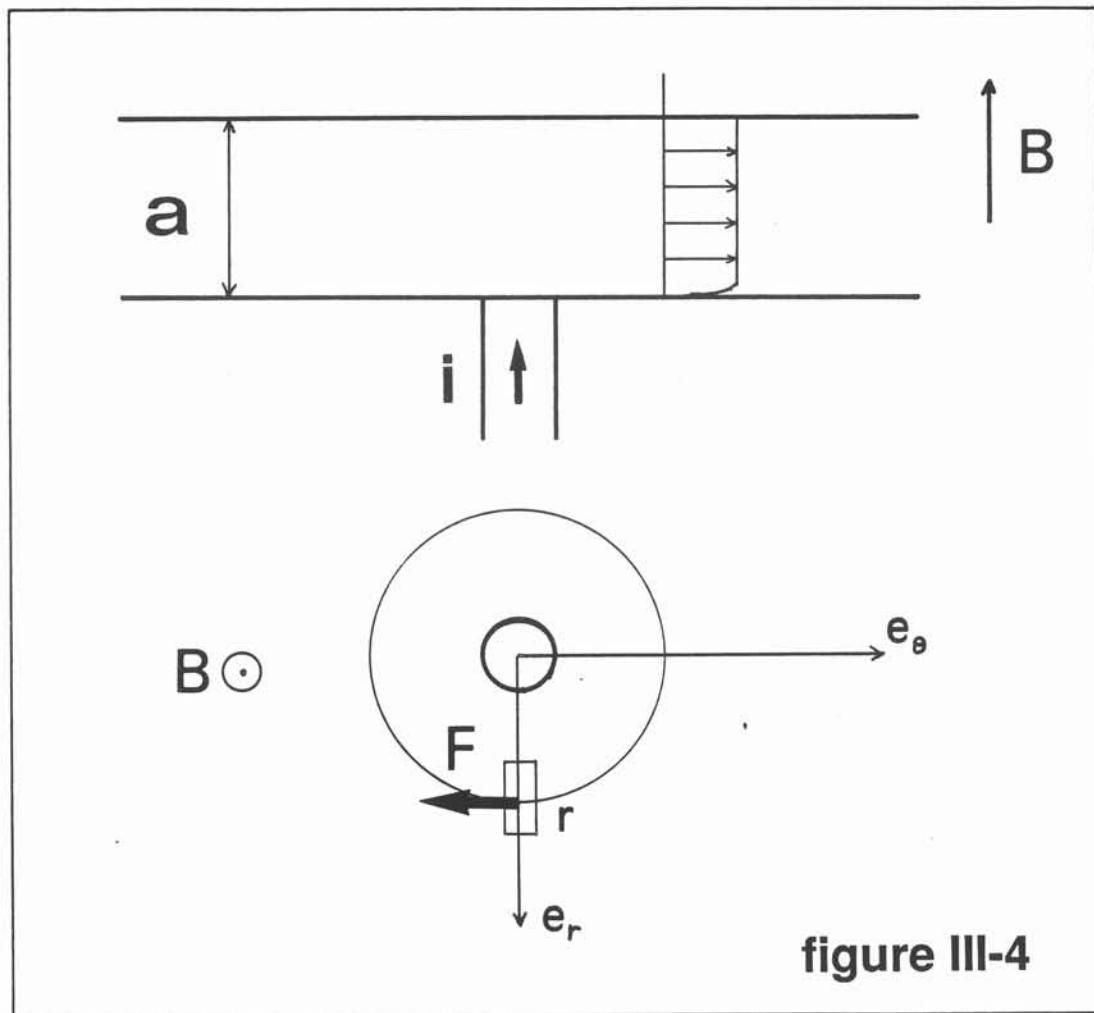
$$\mathbf{F}(r, \theta) = \pm \frac{I B_0}{2\pi r a} \mathbf{e}_\theta$$

Or la force de frottement s'écrit:

$$\rho \frac{\mathbf{v}}{t_h} = \rho \frac{\Gamma}{2\pi r t_h} \mathbf{e}_\theta$$

avec

$$t_h = \left(\frac{\rho}{\sigma v}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{B_0} \frac{1}{s}$$



qui est le temps caractéristique du frottement calculé en (I-40). On en déduit:

$$\Gamma = \pm \frac{\Gamma}{(\rho \sigma \nu)^{1/2}} \frac{1}{s} \quad (\text{III-1})$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire, la vitesse mesurée en un point ne dépend ni de l'intensité du champ magnétique ni de l'épaisseur de la couche de mercure. Elle ne dépend que de l'intensité du courant injecté Γ et du nombre de parois transverses rigides s .

3-1-1-a. Couronne circulaire

Du fait de la taille finie du réseau d'électrodes et de la forme du domaine délimité par les parois de la cuve, l'écoulement engendré par les 282 vortex doit être calculé par la théorie du potentiel complexe [Batchelor 1967].

La méthode des images permet de calculer le potentiel complexe $w(z)$ créé par une distribution de tourbillons en présence de parois [Figure III-5]. La circulation est nulle sur le cercle représentant la paroi de la cuve. Le potentiel complexe est alors donné par:

$$w(z) = \sum_{\text{élec.} +} i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{z - z_p}{z - z_p'} - \sum_{\text{élec.} -} i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{z - z_m}{z - z_m'}$$

où

$z_0 = (0,0)$ est le centre de la cuve

$z = (x,y)$ est le point où on calcule le potentiel complexe

$z_p = (x_p, y_p)$ sont les positions des électrodes positives

$z_m = (x_m, y_m)$ sont les positions des électrodes négatives

z_p' et z_m' sont les images respectives des points z_p et z_m par rapport au cercle de rayon R_0 :

$$|z_p'| \cdot |z_p| = |z_m'| \cdot |z_m| = R_0^2$$

$$\text{Arg}(z_p') = \text{Arg}(z_p)$$

$$\text{Arg}(z_m') = \text{Arg}(z_m)$$

Les figures [III-6 et 7] représentent les profils de vitesse longitudinale $U_1(x)$ et transverse $U_2(x)$ issus du calcul précédent, tels qu'ils seraient mesurés avec la double rangée de petites électrodes. Les spectres longitudinal $E_1(k)$ et transverse $E_2(k)$ montrent que l'énergie est injectée au nombre d'onde $k_i = 100\pi \text{ m}^{-1}$, caractéristique du réseau. L'énergie que l'on mesure, sur le spectre longitudinal, au nombre d'onde $k=0$, est due au phénomène d'aliasing; le spectre monodimensionnel ne peut pas restituer l'aspect bidimensionnel du réseau. Une faible partie de l'énergie est apportée également à bas nombres d'onde, à une échelle voisine de la taille de la cuve.

3-1-1-b. Couronne hexagonale

On construit les images successives de chaque tourbillon par rapport à chaque paroi plane. On obtient alors un réseau infini possédant la périodicité du réseau initial. L'écoulement de base créé dans la cuve est donc en première approximation périodique. En théorie il faudrait superposer un nombre infini de tourbillons; en pratique nous considérons seulement les images du réseau réel par rapport aux parois de la cuve. Nous

figure III-6

Description spatiale de l'écoulement de base avec paroi circulaire : comportement de la composante longitudinale.

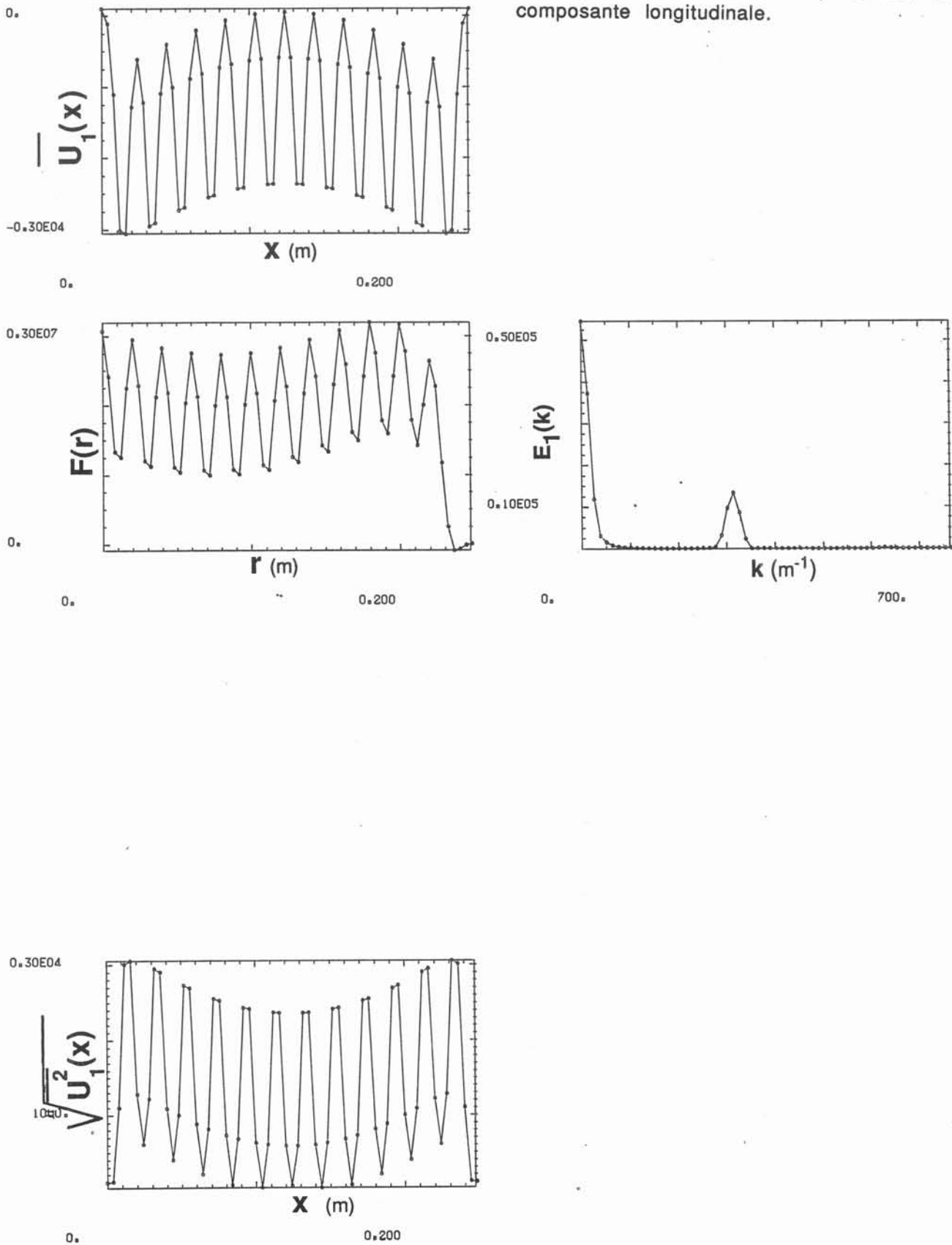


figure III-7

Description spatiale de l'écoulement de base avec paroi circulaire : comportement de la composante transverse.

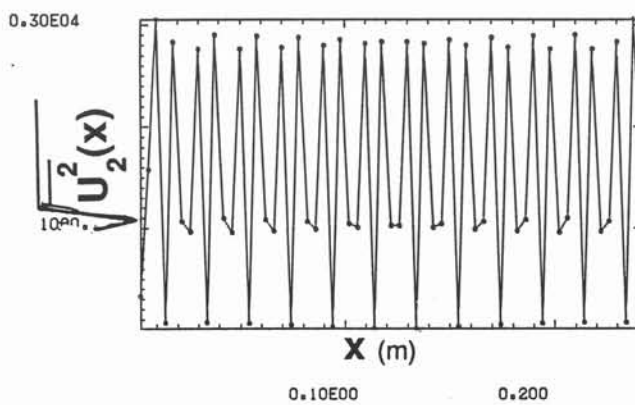
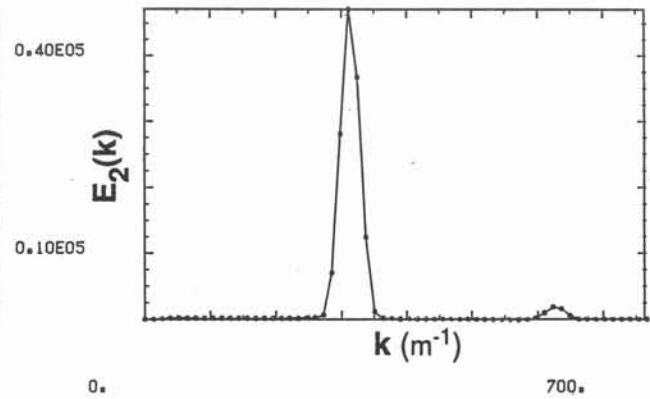
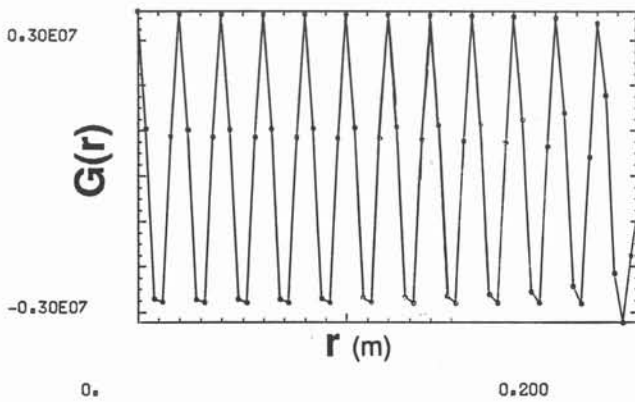
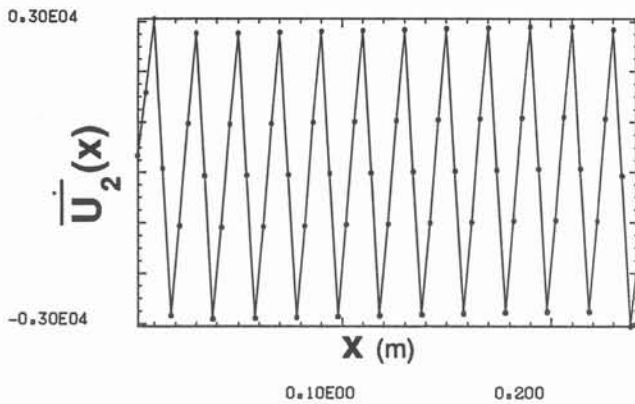


figure III-8

Description spatiale de l'écoulement de base avec paroi hexagonale : comportement de la composante longitudinale.

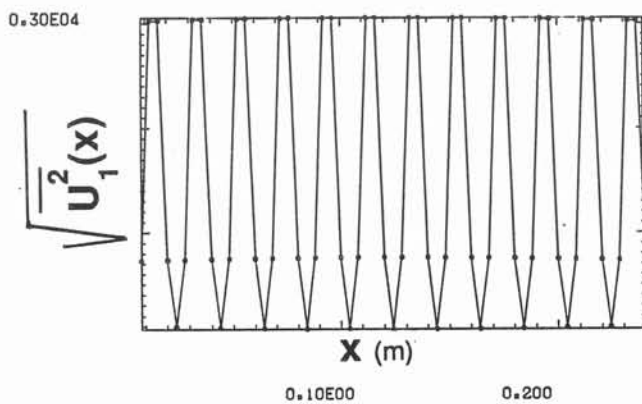
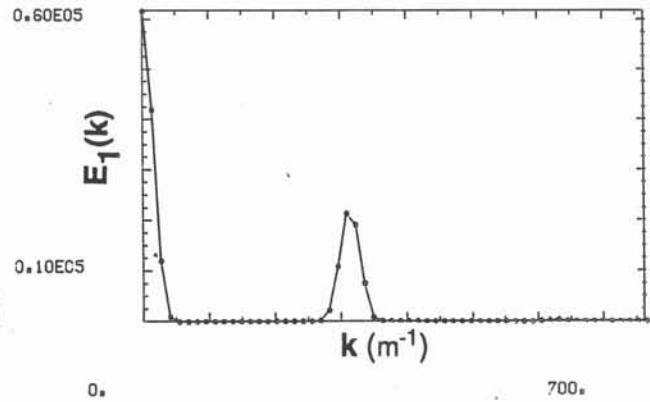
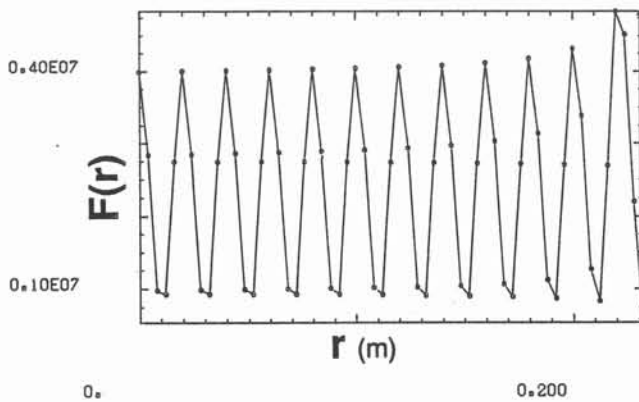
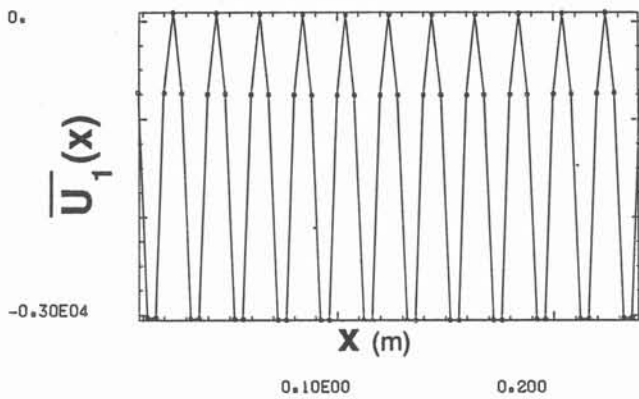
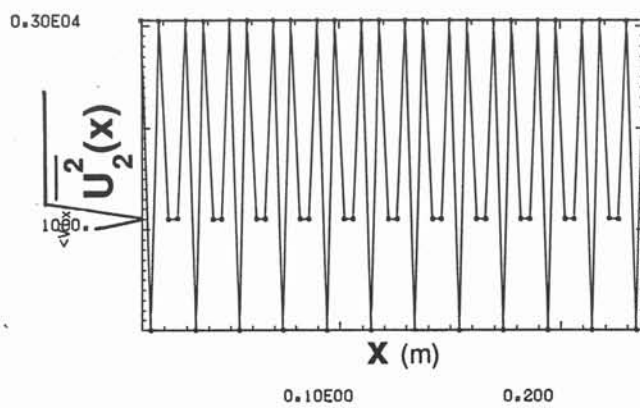
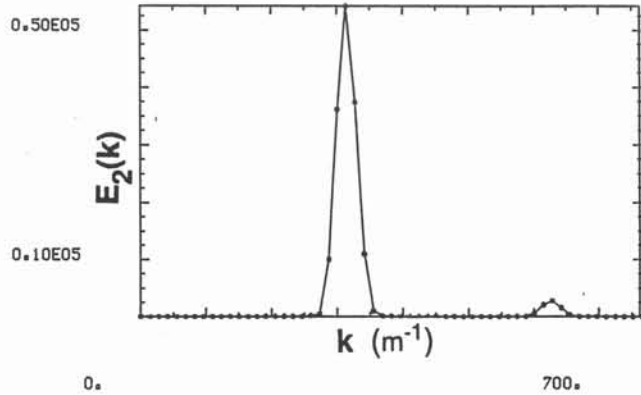
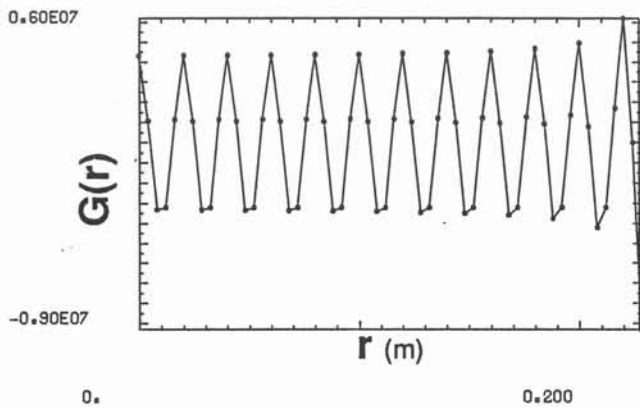
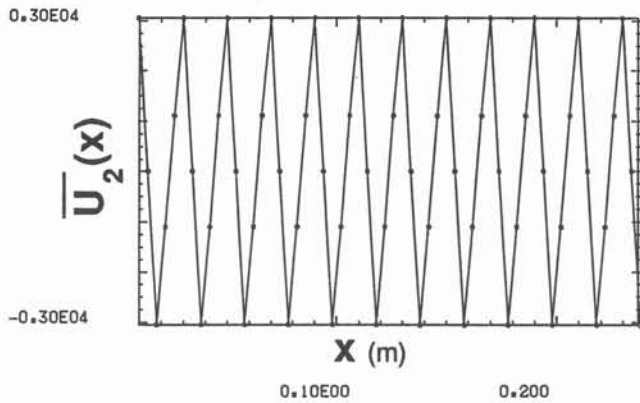


figure III-9

Description spatiale de l'écoulement de base avec paroi hexagonale : comportement de la composante transverse.



présentons également les profils de vitesse $U_1(x)$ et $U_2(x)$ [Figure III-8 et 9]. Le même problème d'aliasing se pose lors du calcul du spectre longitudinal $E_1(k)$. On ne fournit cependant pas d'énergie au bas nombre d'onde dans ce cas.

3-1-1-c. L'écoulement stationnaire mesuré

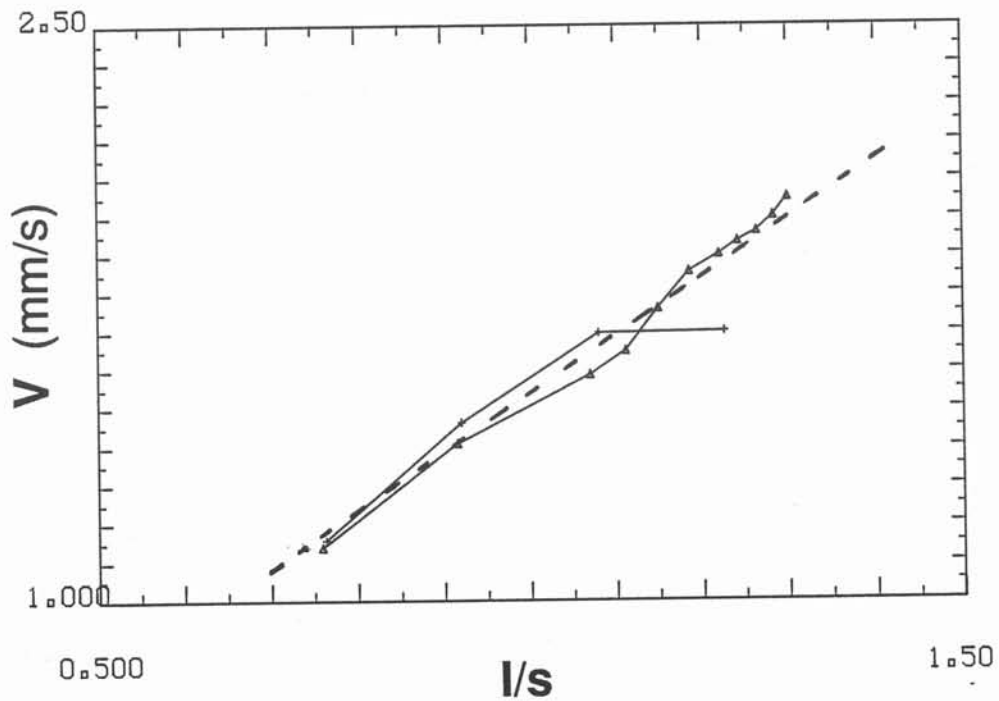
On voit, sur les visualisations avec la surface libre, que les trajectoires de particules suivant le mouvement du fluide sont des boucles fermées, centrées sur l'emplacement des électrodes d'injection du courant électrique [figure III-10 a et b]. Des mesures de potentiels électriques sur la double rangée de petites électrodes, menées à $Rh = 1.42$, montrent également que la vitesse est stationnaire [figure III-11 a et b]. La figure III-11 c indique que la vitesse est bien proportionnelle à $1/s$ conformément à la relation (III-1). Nous retrouvons sur le spectre spatial monodimensionnel, $E_2(k)$, le nombre d'onde k_i où a lieu le forçage et où reste concentrée l'énergie [figure III-12].

3-1-2. Voisinage du Seuil de Déstabilisation

On augmente progressivement la valeur du paramètre Rh . A partir d'une certaine valeur, $Rhc \approx 1.40$, le régime n'est plus stationnaire. Nous observons ce changement aussi bien sur les photos de trajectoires que sur les signaux électriques. Il est difficile de distinguer à quel moment a lieu cette instabilité à l'œil nu car le changement est faible et le mouvement des particules sur la surface est très lent. Au voisinage du seuil de déstabilisation Rhc le champ de vitesse mesuré présente des fluctuations temporelles périodiques [figure III-13 a et b]. les signaux fluctuent à la même fréquence le long de toute la ligne de mesure. L'intensité des fluctuations est modulée en fonction de la position du point de mesure à l'intérieur de chaque structure hexagonale. Le centre des hexagones est le siège de variations plus fortes de la vitesse. On note également une différence entre le bord droit et le bord gauche de la cuve. Cette différence est liée au sens de la vitesse longitudinale; les fluctuations sont plus grandes là où la vitesse diverge contre la paroi. Le spectre spatial $E_2(k)$ n'est que très légèrement déformé [figure III-14]. Pour voir à quels nombres d'onde agissent les fluctuations on considère le spectre spatial sur les quantités fluctuantes $e_2(k)$. Cette représentation met en évidence des nombres d'onde particulièrement développés $k_0, 2k_0, 4k_0$ où $k_0 = k_i/3$. Le spectre spatio-temporel $E(k, f)$ [figure III-15] fournit une information plus synthétique. Il montre que les nombres d'onde et les fréquences excités correspondent à un même phénomène. Ce sont des ondes progressives qui n'ont pas toutes la même direction de propagation. Celles de modules k_0 et $4k_0$ se propagent dans une direction alors que celle de module $2k_0$ se propage dans une direction opposée. Si on inverse le sens du courant dans les électrodes, les ondes se propagent dans des directions opposées.

3-1-3. Apparition du Chaos

Pour un Rh légèrement supérieur à la valeur précédente, le signal temporel ne présente plus d'oscillations régulières; le spectre temporel est complexe [figure III-16]. Les spectres spatiaux $E_2(k)$ et $e_2(k)$ ne font plus apparaître des nombres d'onde excités bien nets [figure III-17]. L'apparence continue de ces spectres est trompeuse. On distingue mieux, sur le spectre spatio-temporel $E(k, f)$ [figure III-18], le développement d'une perturbation à basse fréquence touchant une gamme étendue de



Δ surface rigide
 + surface libre
 --- modèle de points vortex

Ecoulement de base dans le cas avec paroi hexagonale

figure III-10 c

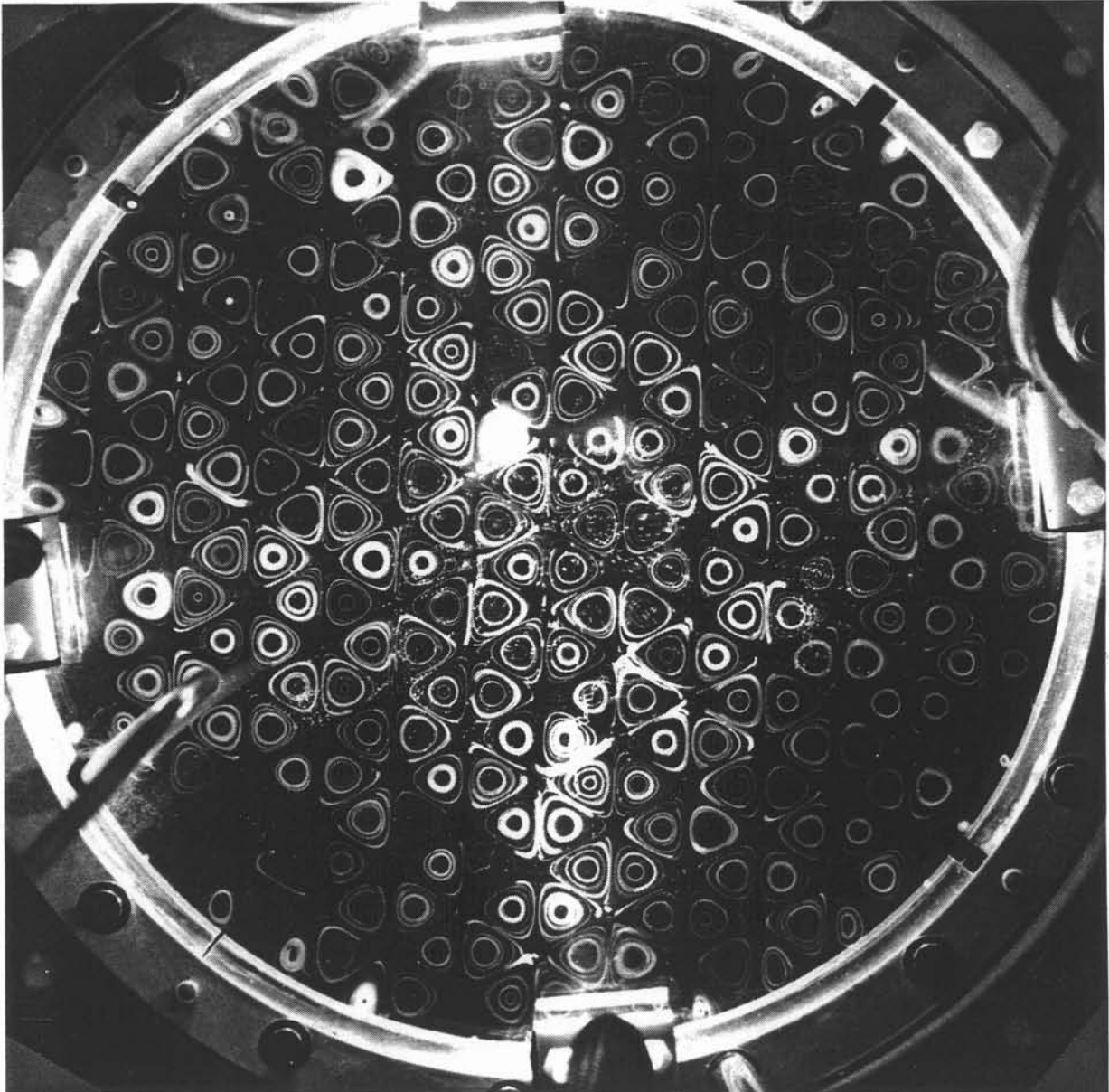


figure III-10 a

Régime permanent à $Rh=1.3$ avec paroi circulaire

Visualisation des trajectoires de particules déposées sur la surface du mercure. Le temps de pose est de 5 secondes. Les vitesses sont de l'ordre de quelques millimètres par secondes.

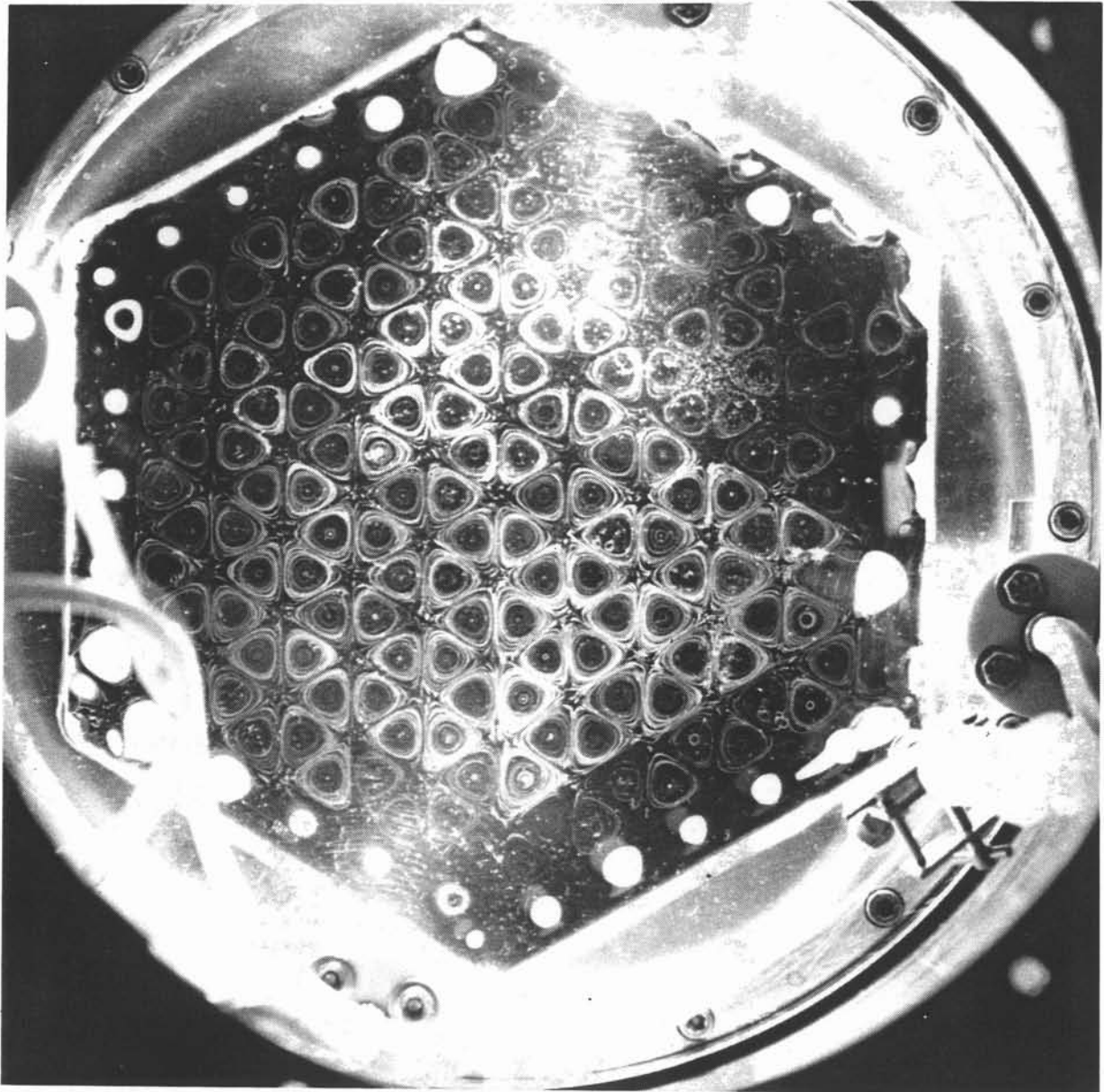


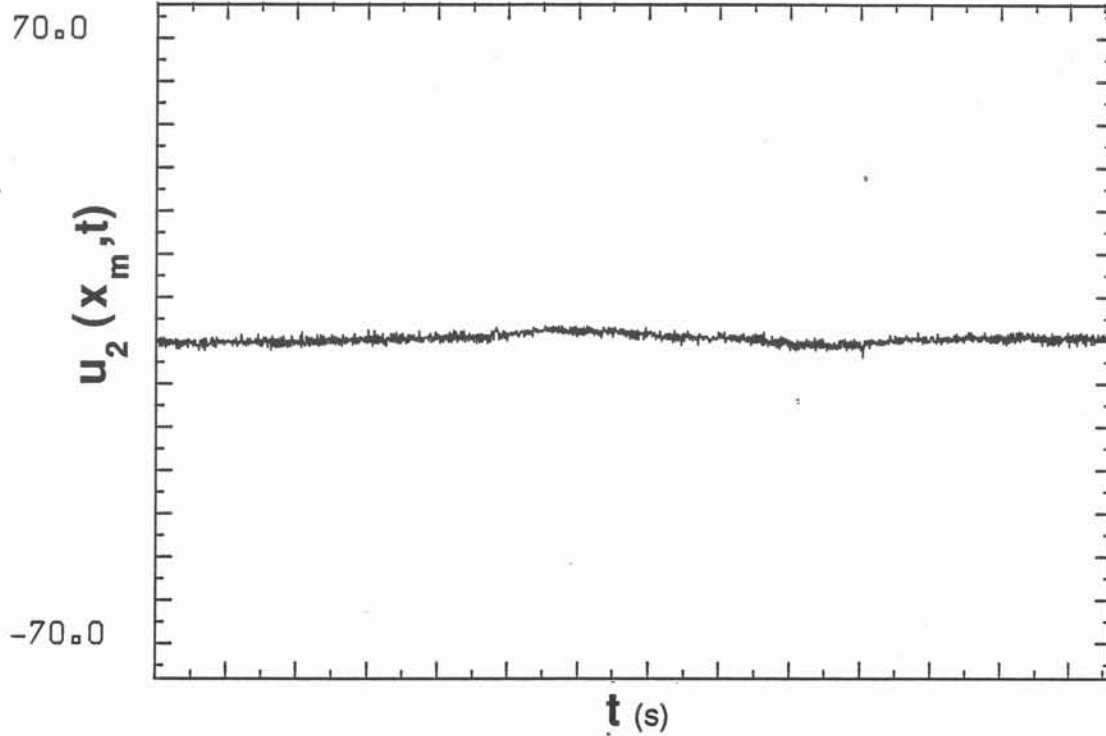
figure III-10 b

Régime permanent à $Rh=1.4$ avec paroi hexagonale

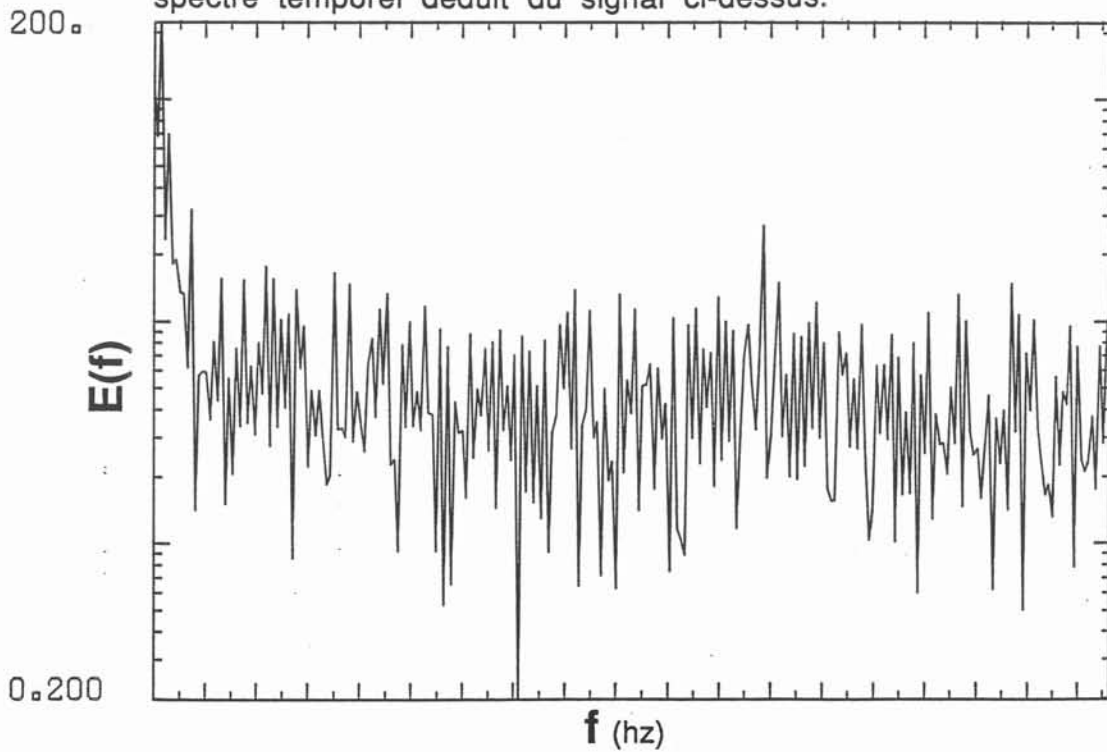
Visualisation des trajectoires de particules déposées sur la surface du mercure. Le temps de pose est de 5 secondes. Les vitesses sont de l'ordre de quelques millimètres par secondes.

Rh = 1.42

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

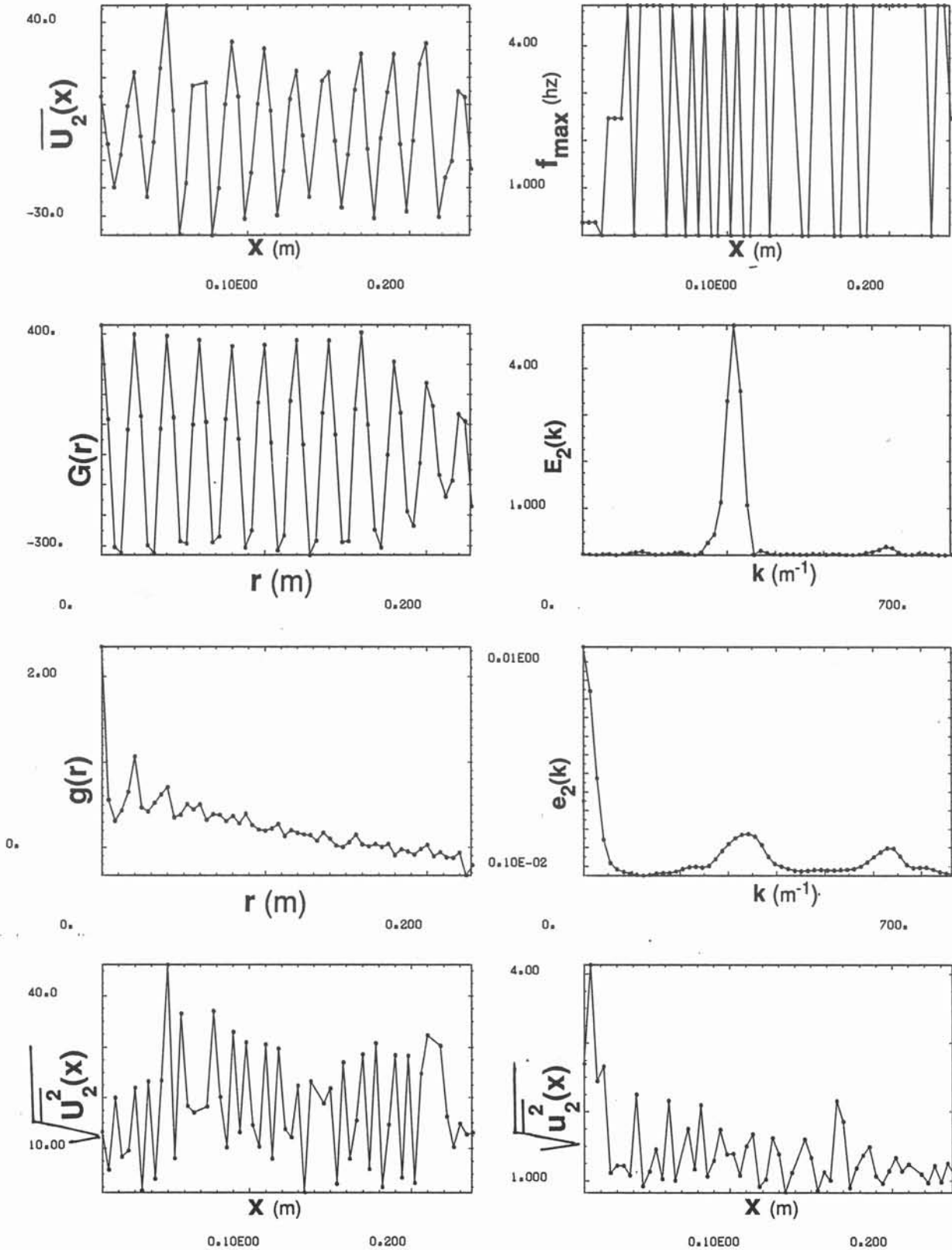


spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

**figure III-11**

Rh = 1.42

figure III-12



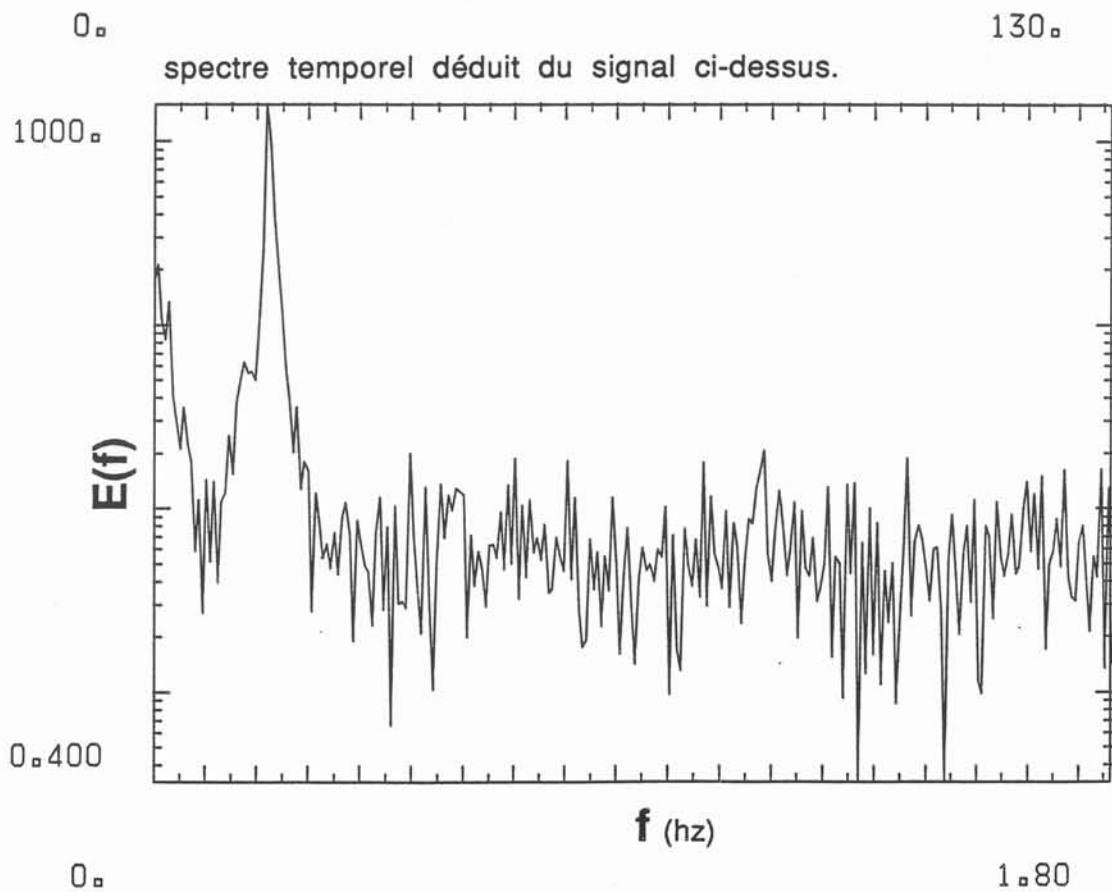
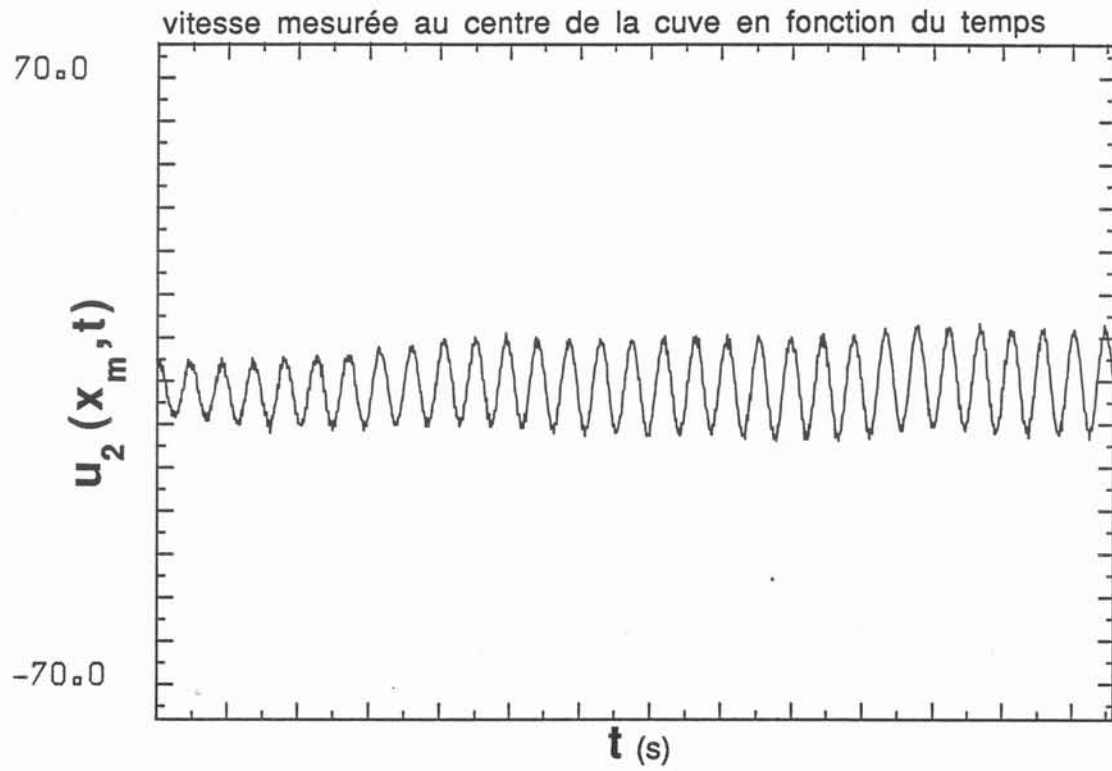
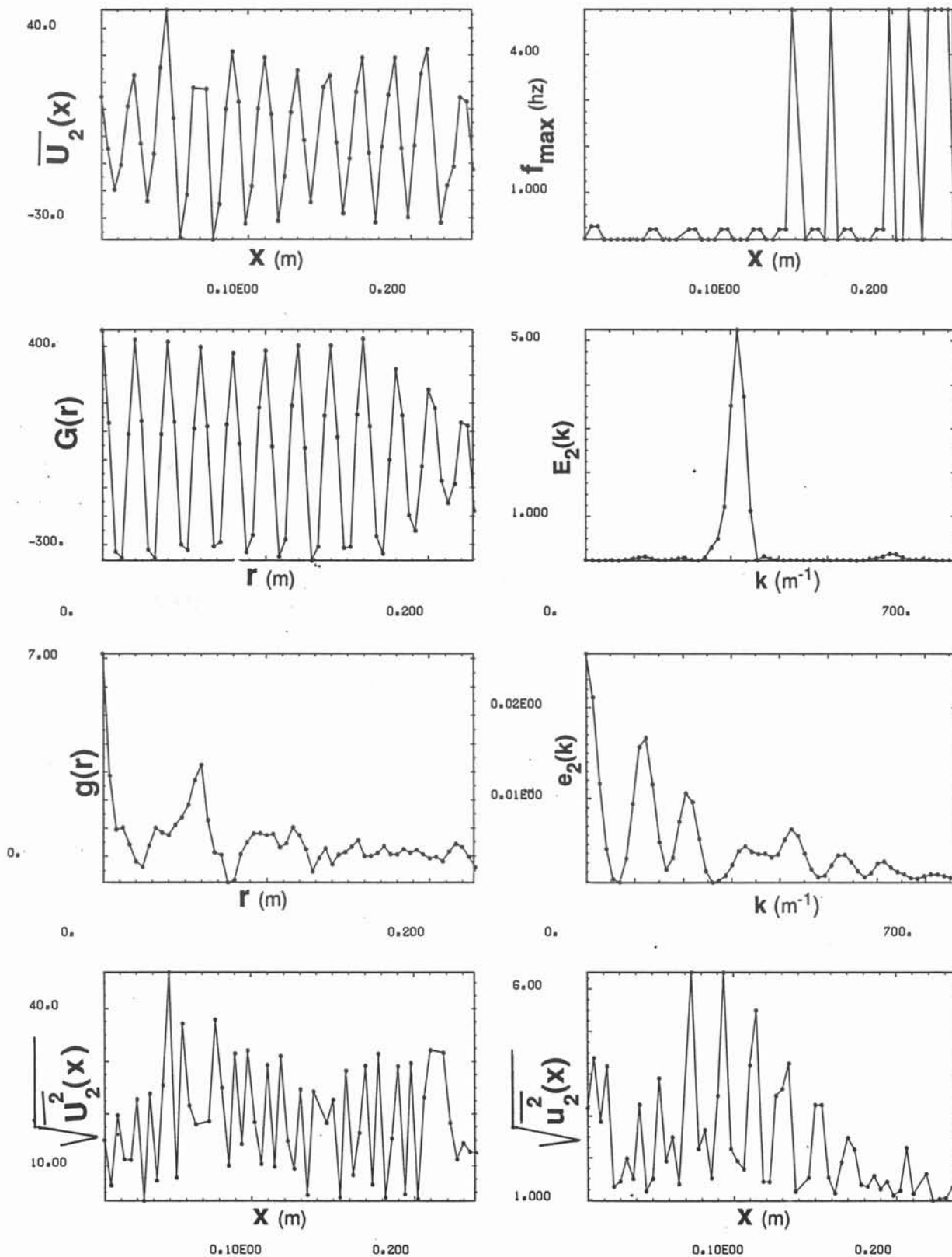
Rh=1.45**figure III-13**

figure III-14

Rh=1.45



Rh=1.45

Spectre spatio-temporel

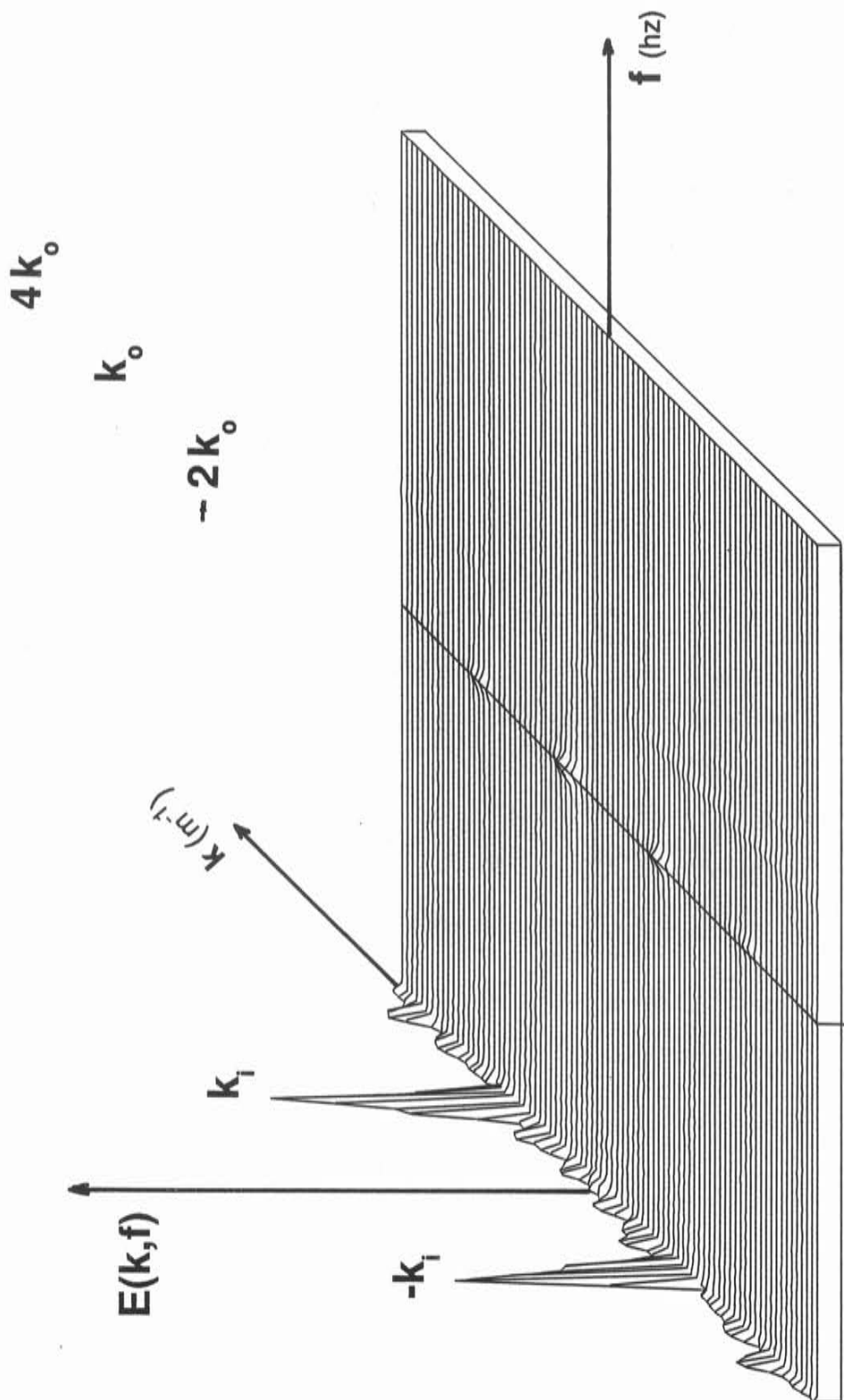
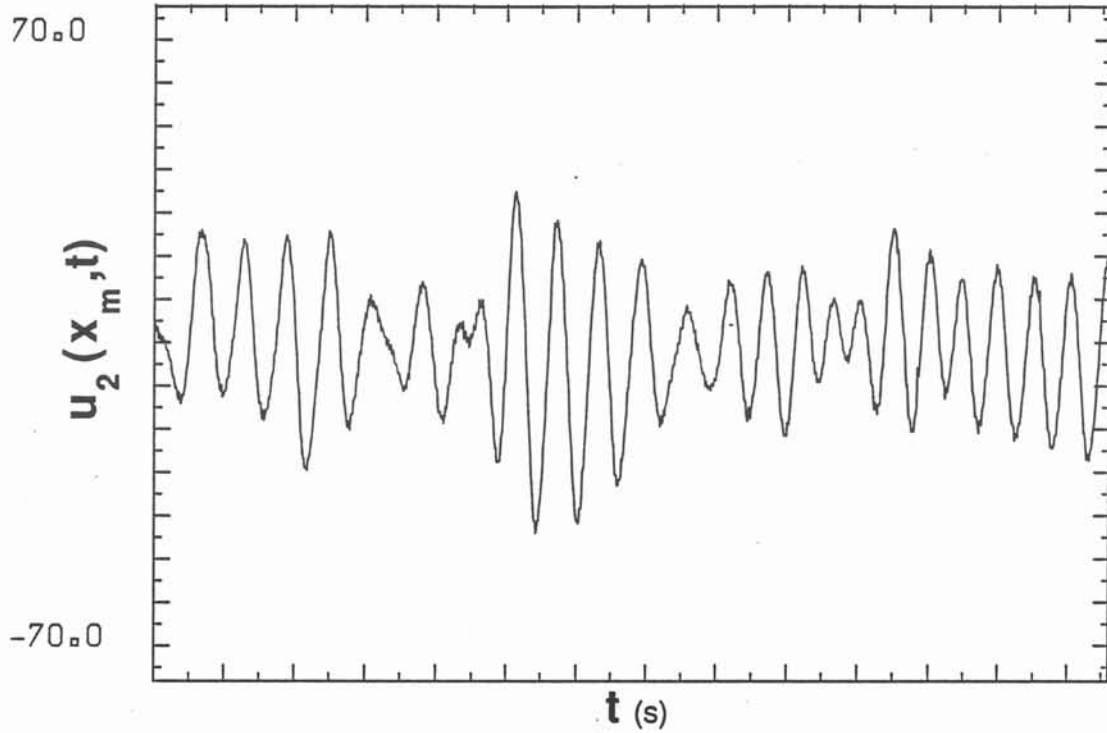


figure III-15

Rh=1.47

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps



spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

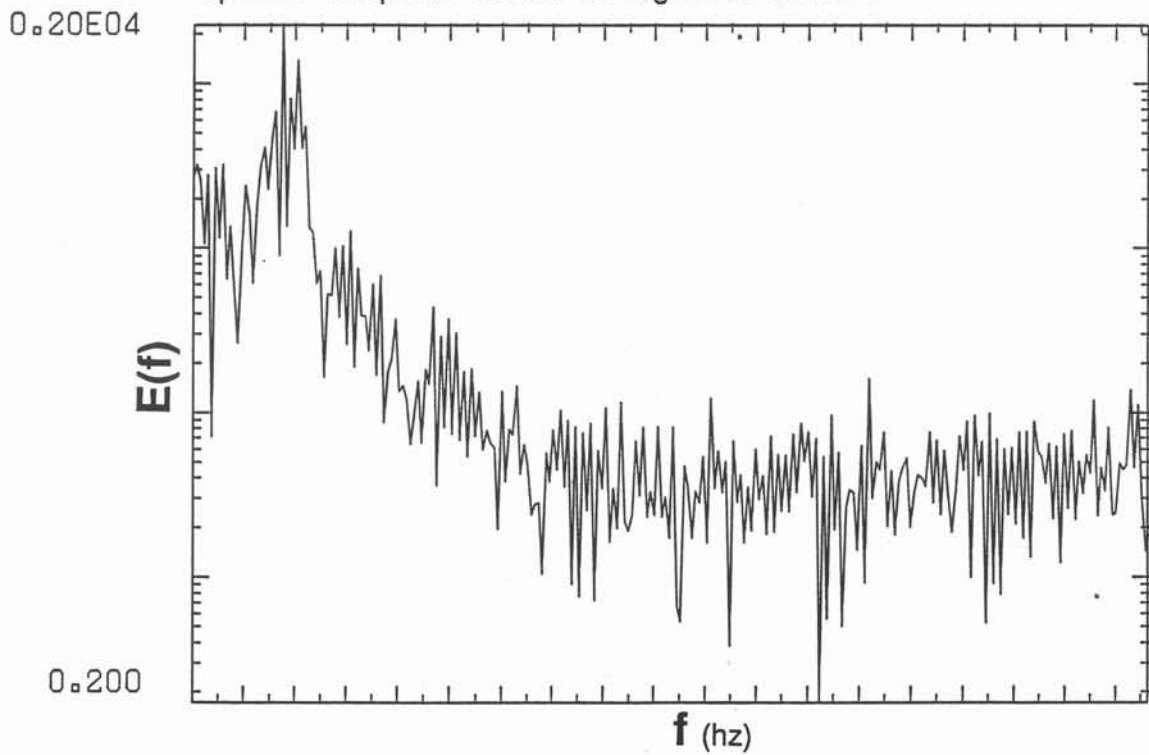
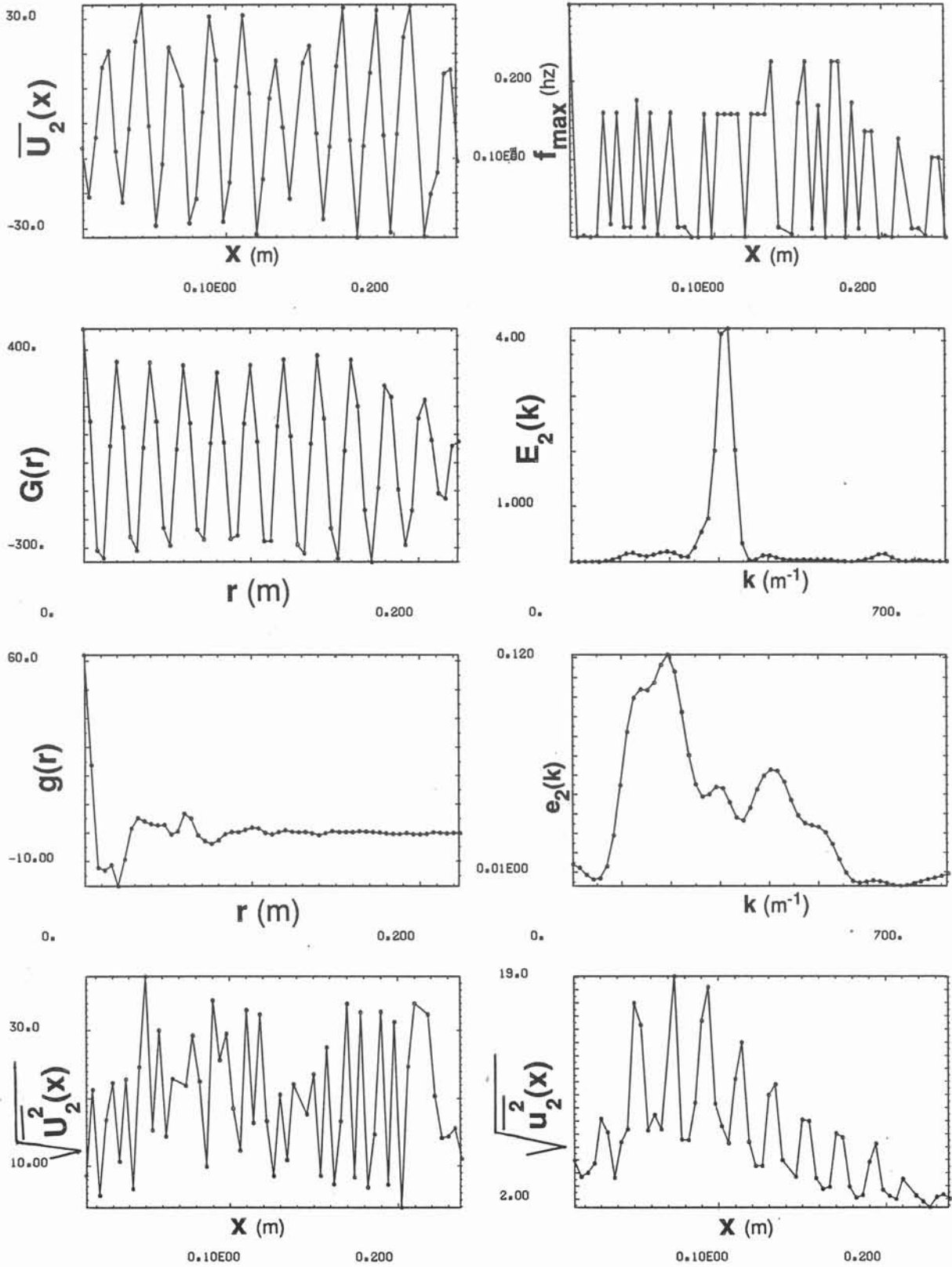


figure III-16

figure III-17

Rh=1.47



Rh=1.47

Spectre spatio-temporel

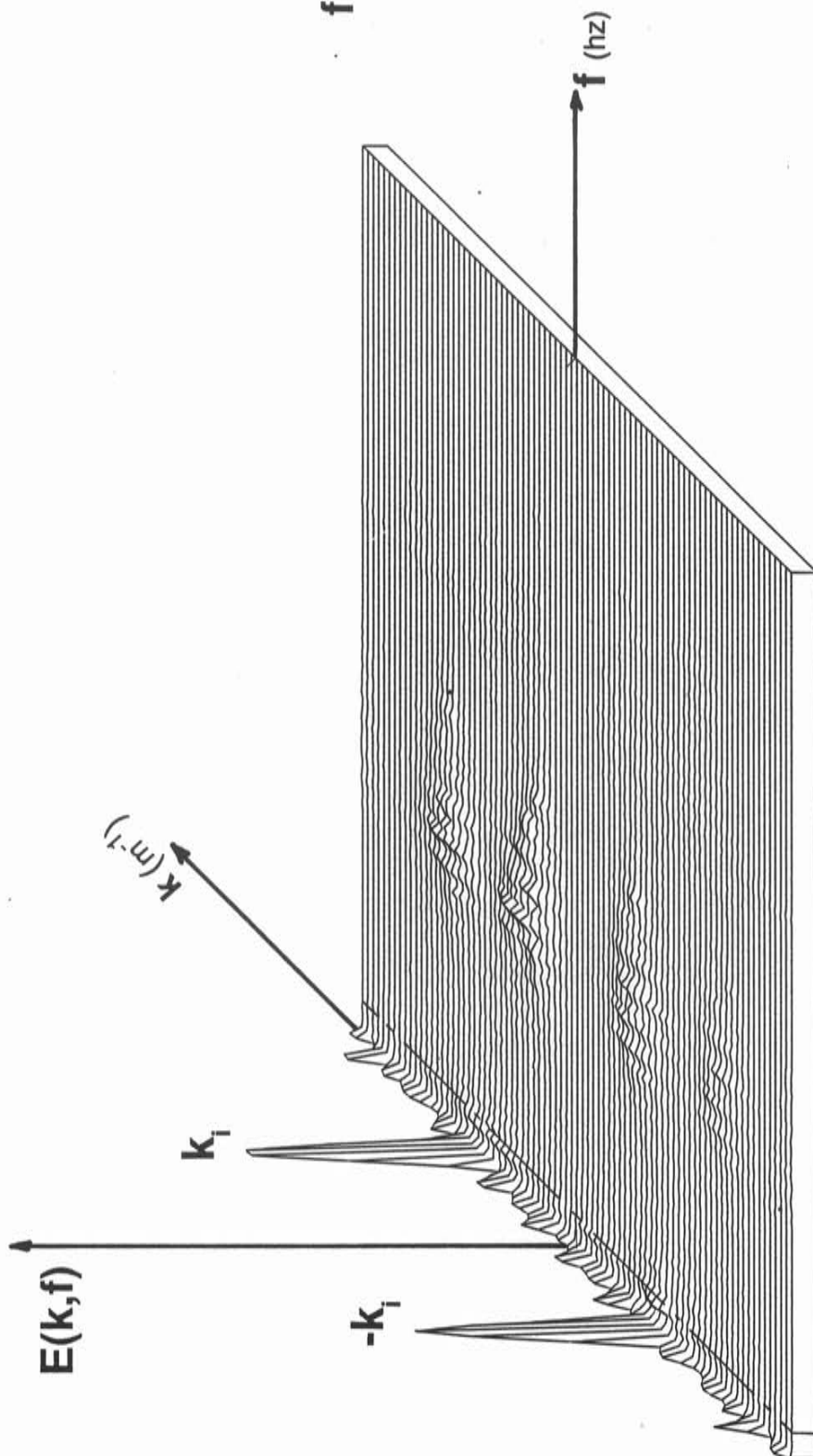
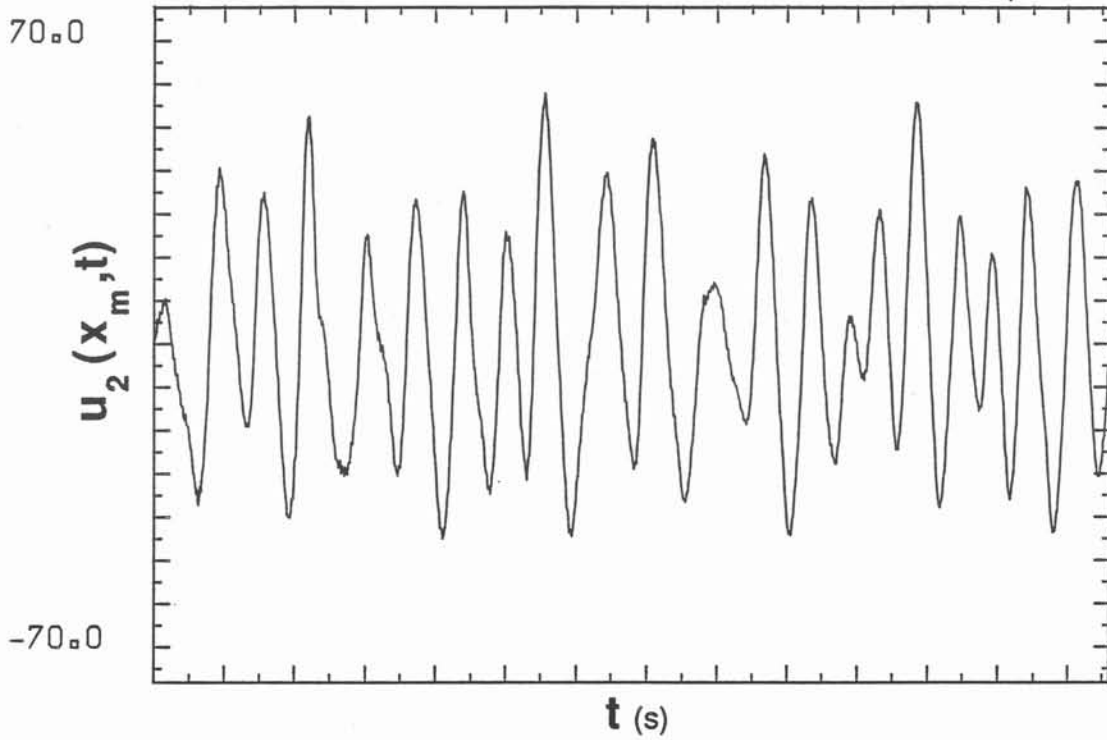


figure III-18

Rh=1.49

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps



spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

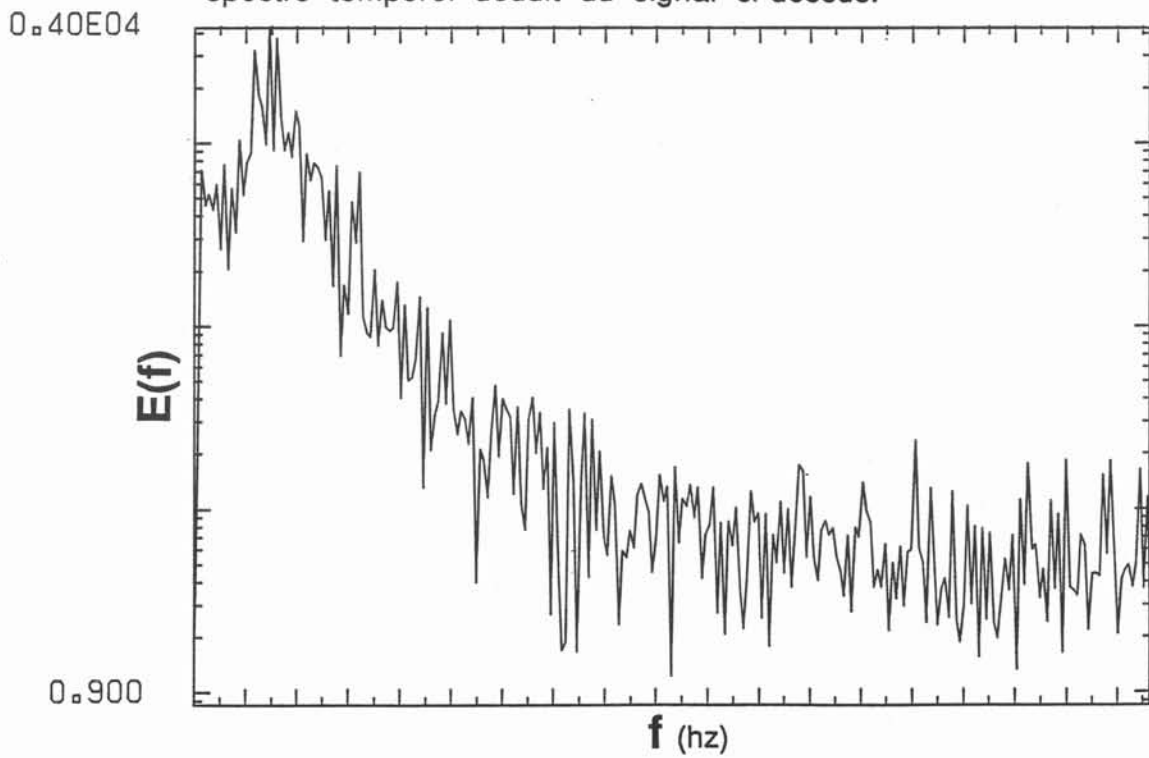
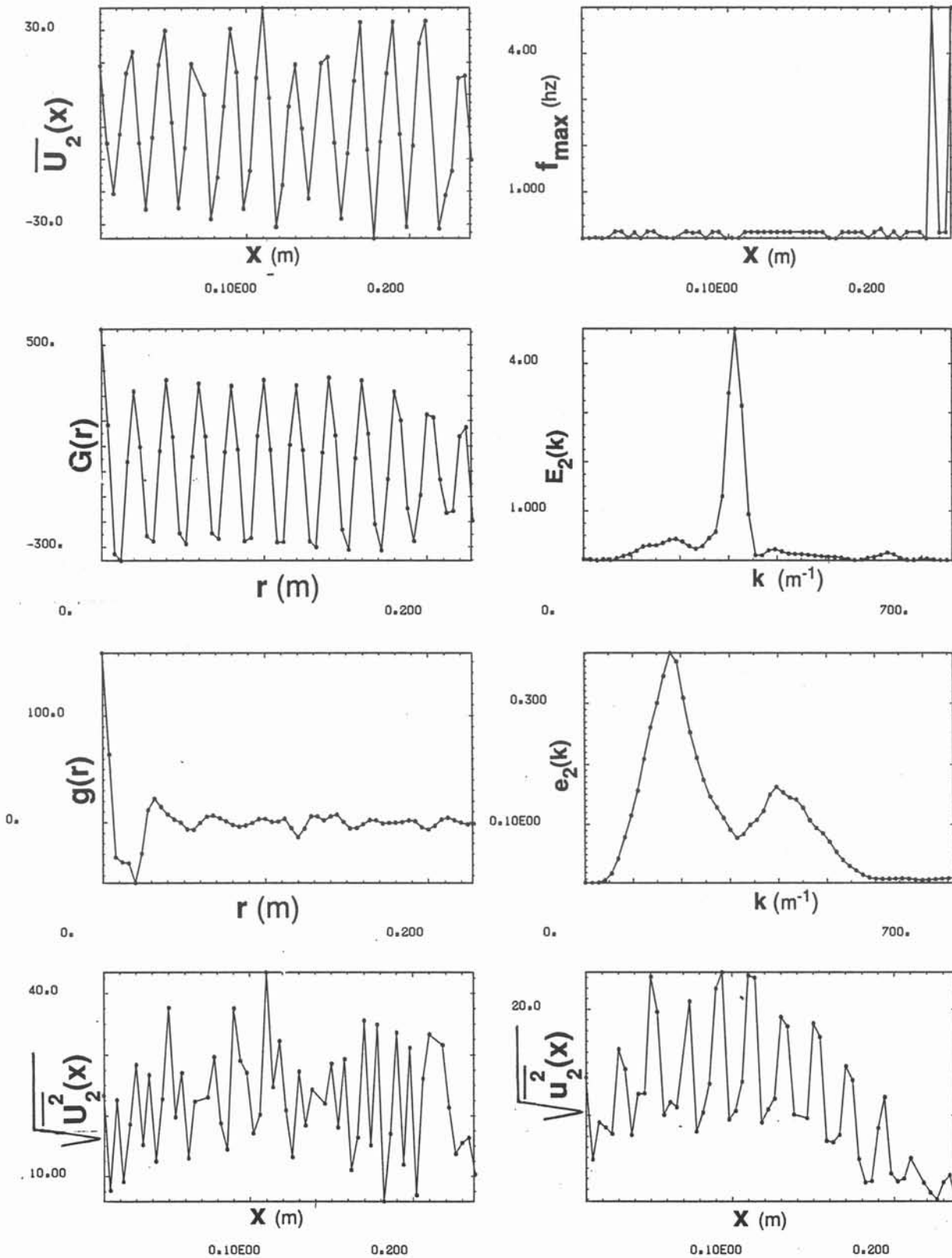


figure III-19

figure III-20

Rh=1.49



$Rh=1.49$

Spectre spatio-temporel

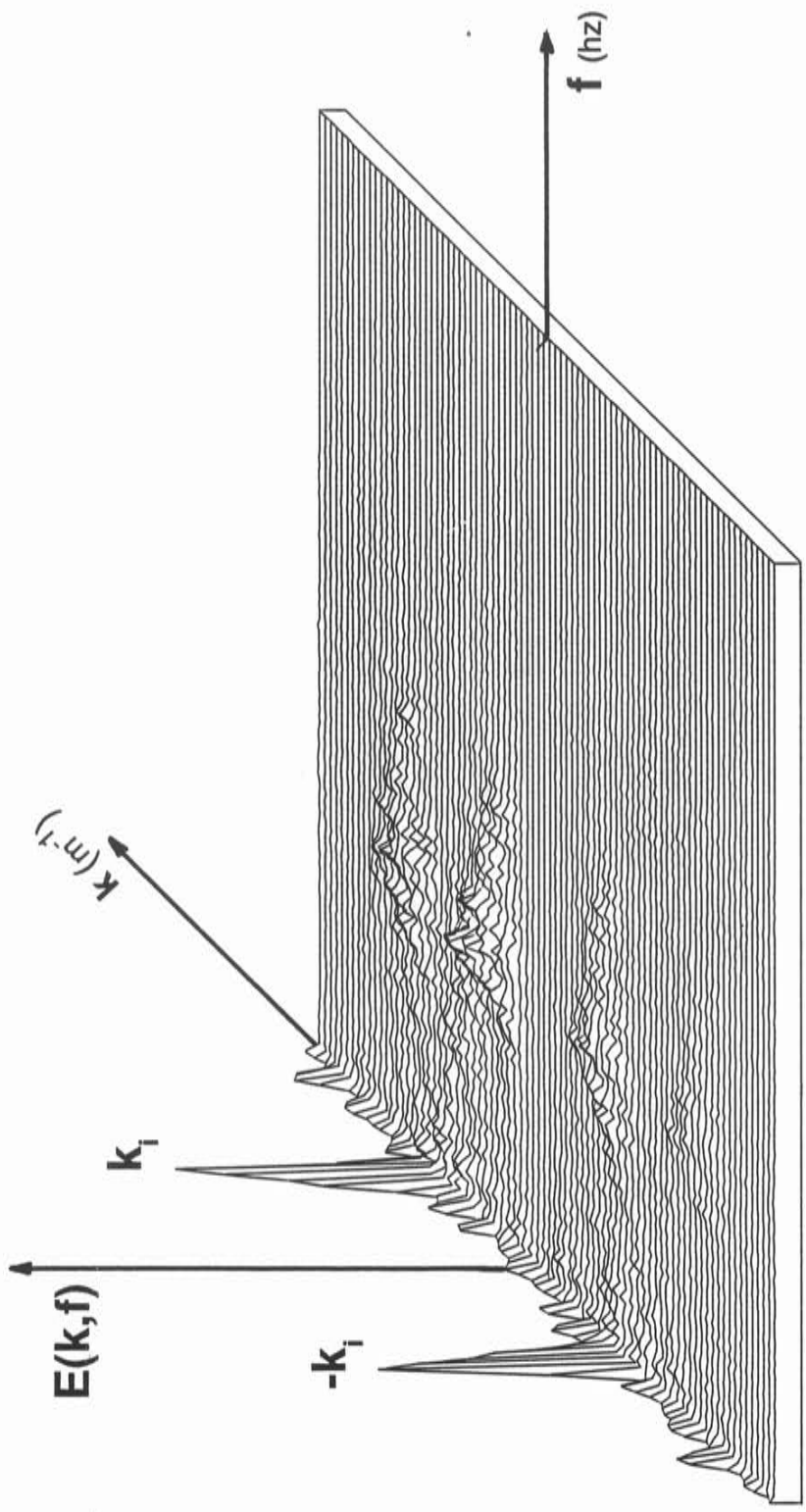


figure III-21

nombre d'onde. Cette nouvelle instabilité interagit avec les ondes déjà déstabilisées k_0 , $2k_0$ et $4k_0$ car on voit nettement que les pics apparus lors de la première instabilité se sont élargis aussi bien selon l'axe des fréquences que selon l'axe des nombres d'onde. Une situation encore plus complexe est présentée sur les figures (III-19, 20 et 21).

3-4. Réapparition d'un Régime Périodique

Lorsqu'on augmente encore le forçage (c'est à dire l'importance des effets inertiels), nous obtenons un régime où le signal de vitesse varie à nouveau de façon "presque" périodique [figure III-22]. La fréquence f_{ac} est nettement privilégiée même si un bruit de fond subsiste. Ce régime correspond à un état où les nombres d'onde excités sont de nouveau dans des rapports rationnels avec le nombre d'onde dans lequel on injecte l'énergie. L'écoulement a alors une organisation spatiale très nette [figure III-23, voir $G(r)$ et $g(r)$]. L'utilisation du spectre spatio-temporel [figure III-24] montre de plus que l'énergie des fluctuations est presque entièrement distribuée à la fréquence f_{ac} et aux nombres d'onde $k_i/3$, $-2k_i/3$ et $4k_i/3$. On notera encore le signe négatif du nombre d'onde $2k_i/3$ signifiant que cette perturbation se propage dans le sens opposé aux deux autres. Les visualisations [figure III-25] montrent des structures plus régulières, stationnaires, où on reconnaît des triplets de tourbillons. Ces assemblages s'alignent dans des directions précisées sur la figure (III- 26).

3-5. Retour Vers le Chaos

A la suite de cette phase d'accrochage, un régime chaotique apparaît à nouveau. Les spectres temporels et spatiaux se comportent de façon continue [figure III-27, 28 et 29] . D'autres zones d'accrochage ont été aperçues mais celles-ci n'ont pas été étudiées de façon systématique.

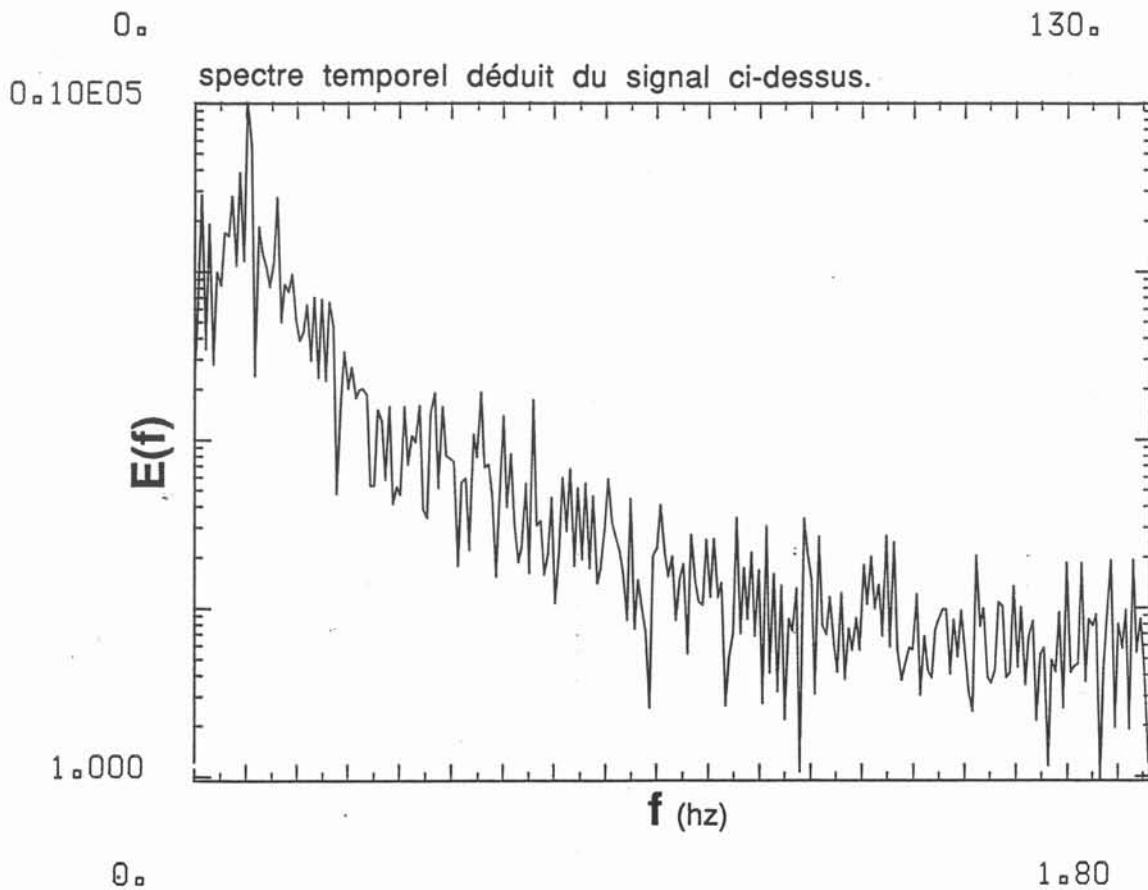
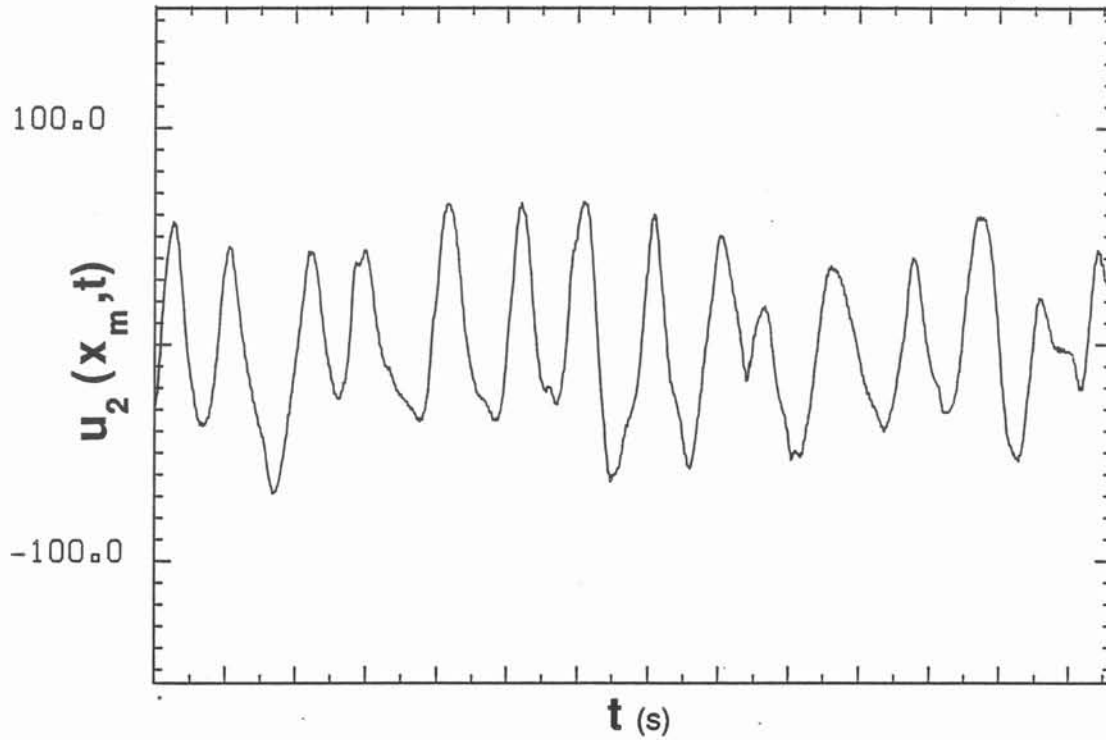
3-2. Synthèse et Interprétation

Nous venons de décrire les régimes variés d'écoulements rencontrés lorsqu'on modifie la valeur du paramètre Rh . Les pics des spectres ne sont pas toujours parfaitement nets. Il est clair qu'aux faibles vitesses, nous nous trouvons à la limite des possibilités de la chaîne de mesure que nous avons présentée. Par contre, les résultats obtenus sont indiscutables quand on suit leur progression continue. Nous caractériserons maintenant les états rencontrés par un petit nombre de paramètres pour suivre les transitions. L'écart entre le régime stationnaire et les régimes perturbés se mesure par la valeur quadratique moyenne des fluctuations:

$$r_{ms} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{v_i^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(V_i(t) - \bar{V}_i)^2} \quad v$$

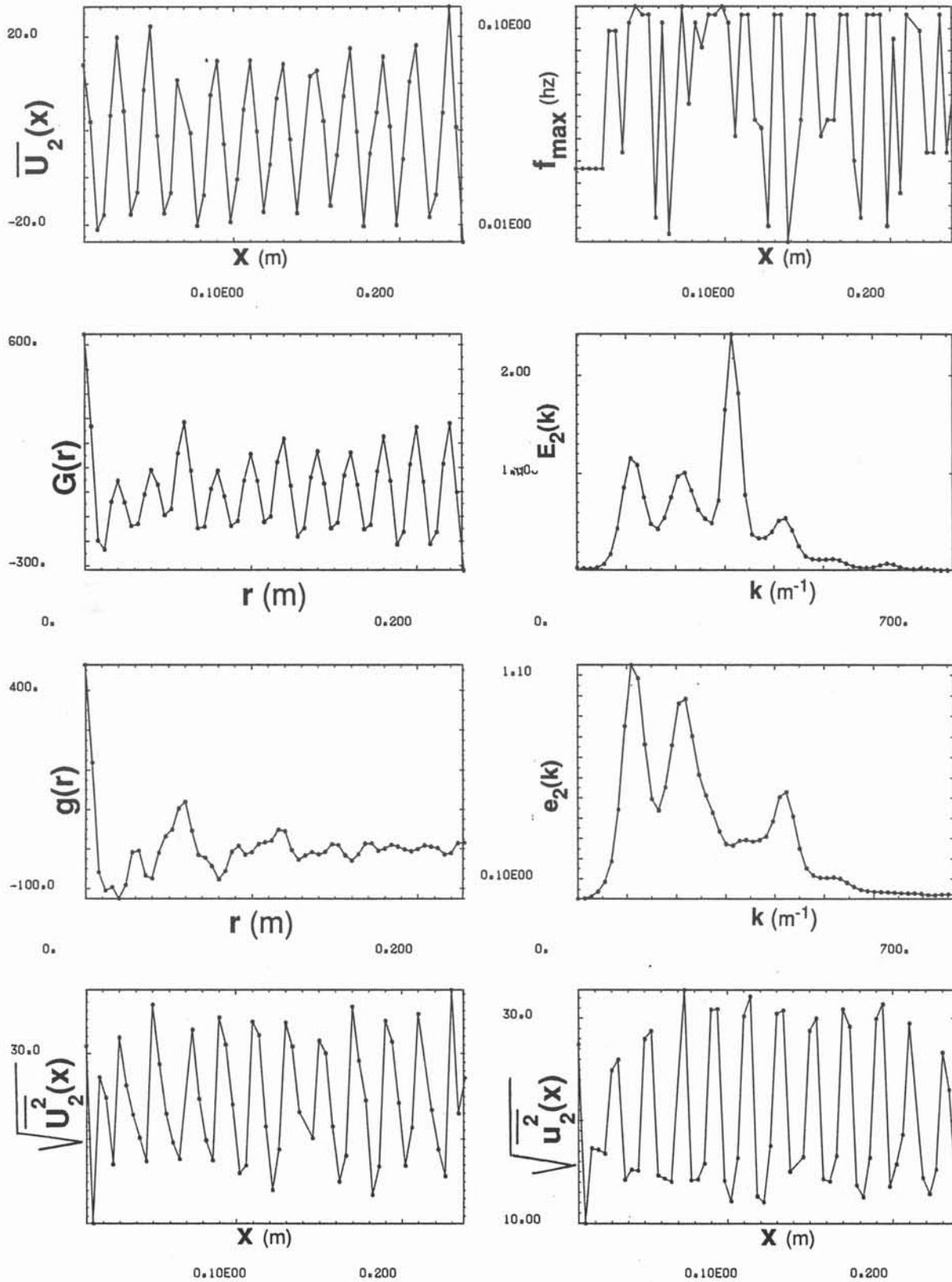
Rh=1.58

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

**figure III-22**

Rh=1.58

figure III-23



Spectre spatio-temporel

$Rh=1.58$

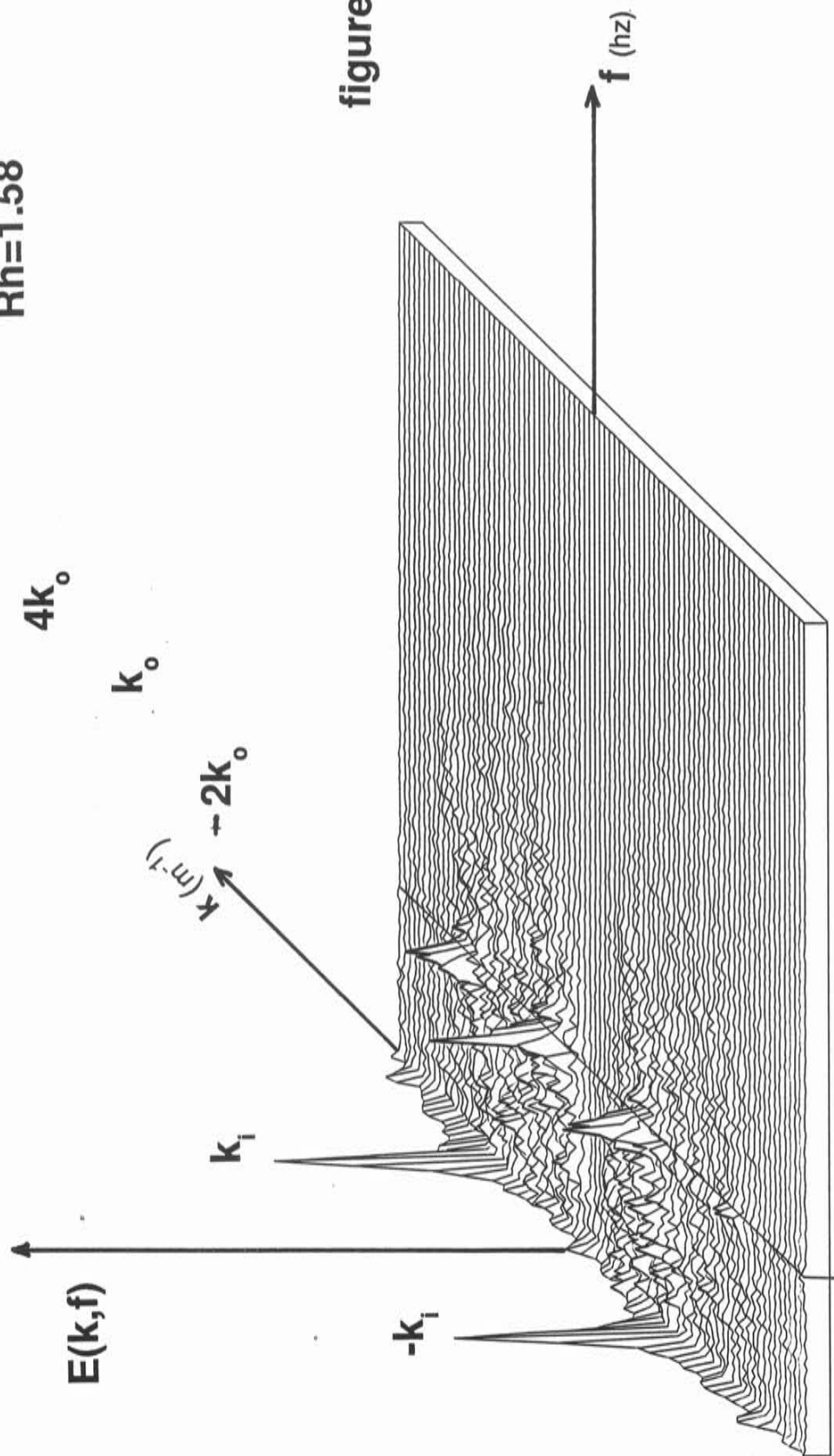


figure III-24

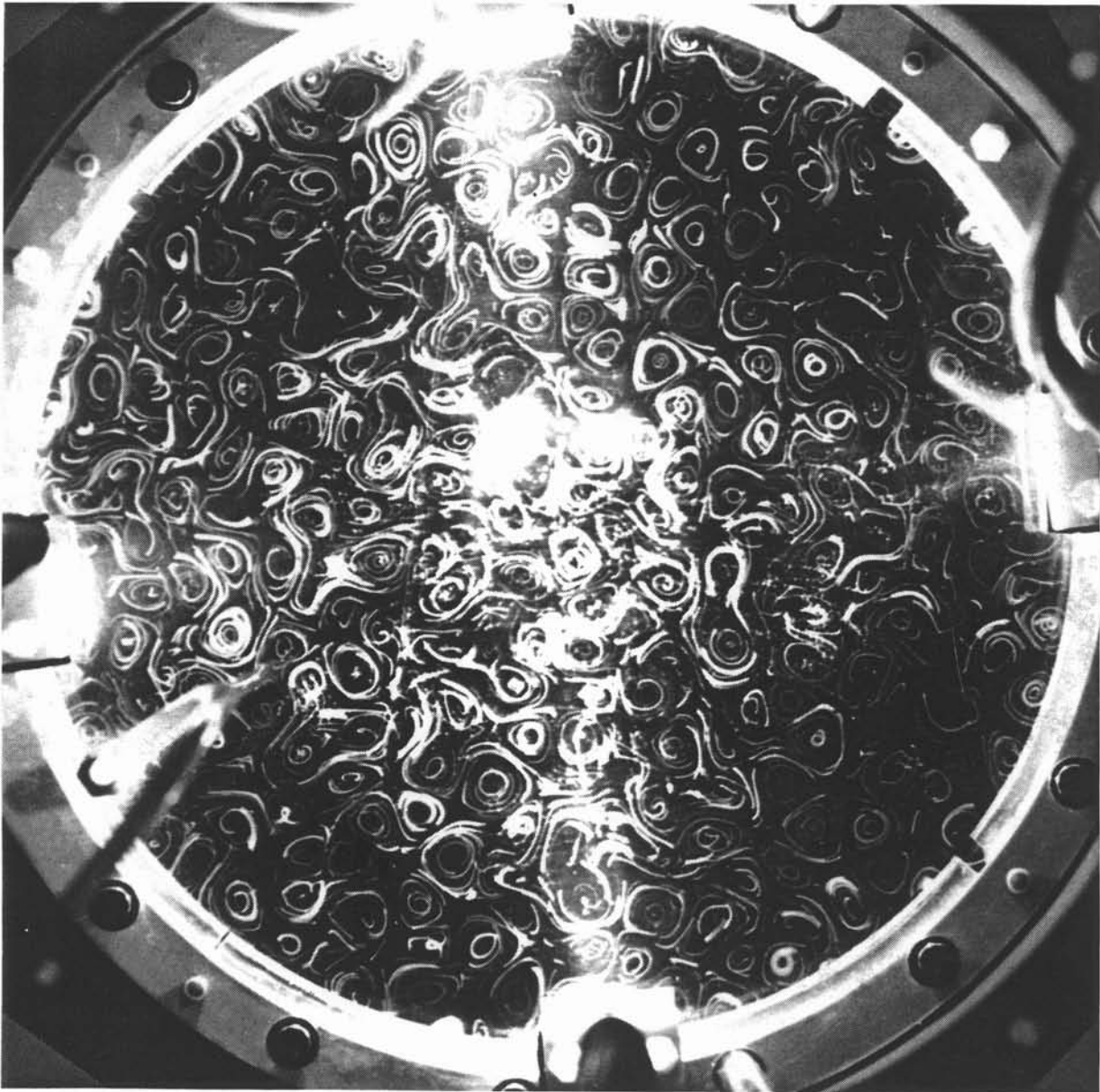


figure III-25

Régime accroché à $Rh=1.6$ avec paroi circulaire

Visualisation des trajectoires de particules déposées sur la surface du mercure. Le temps de pose est de 5 secondes. On note une certaine organisation spatiale sous forme d'alignement de structures formées de 3 tourbillons.

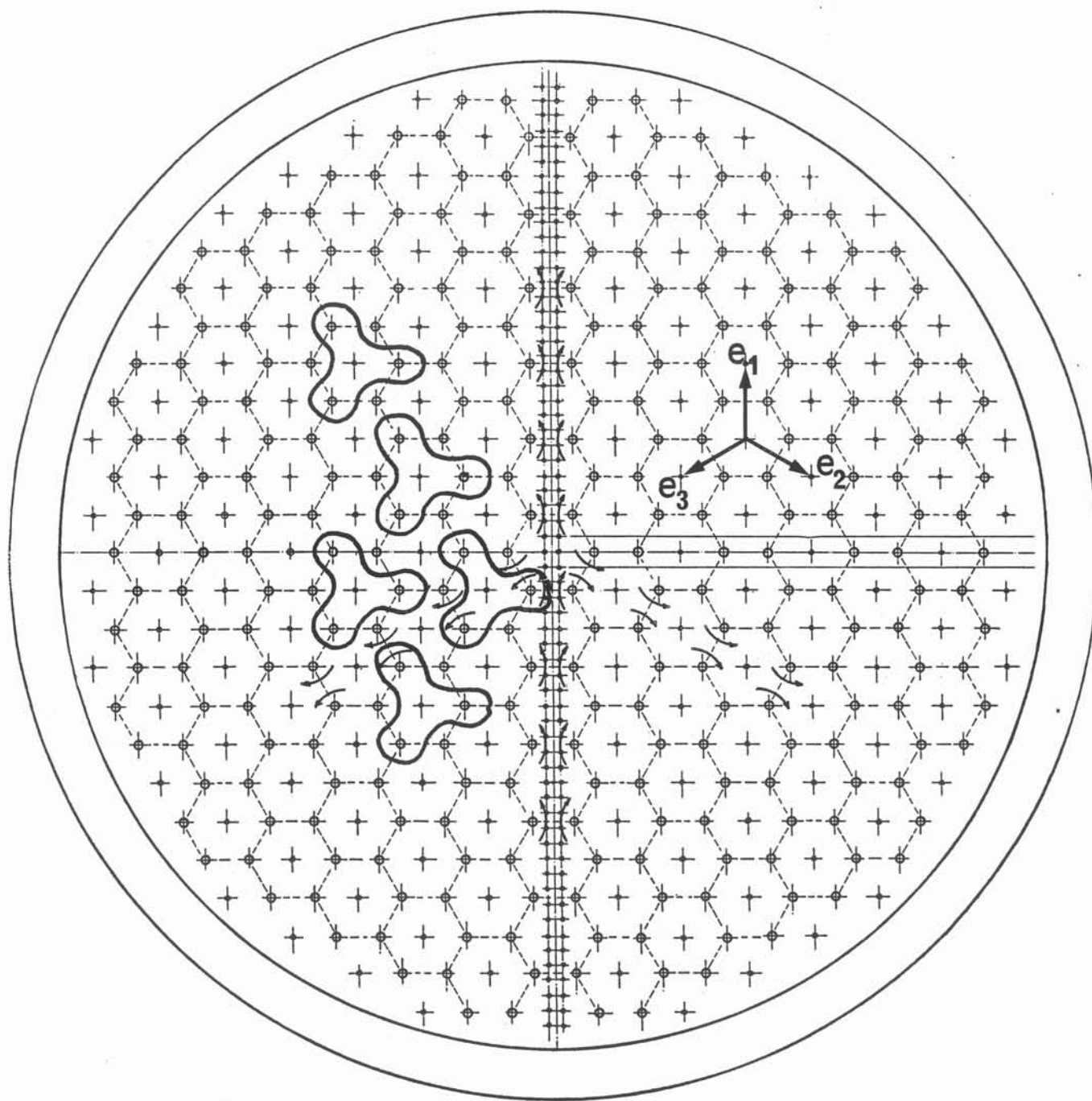
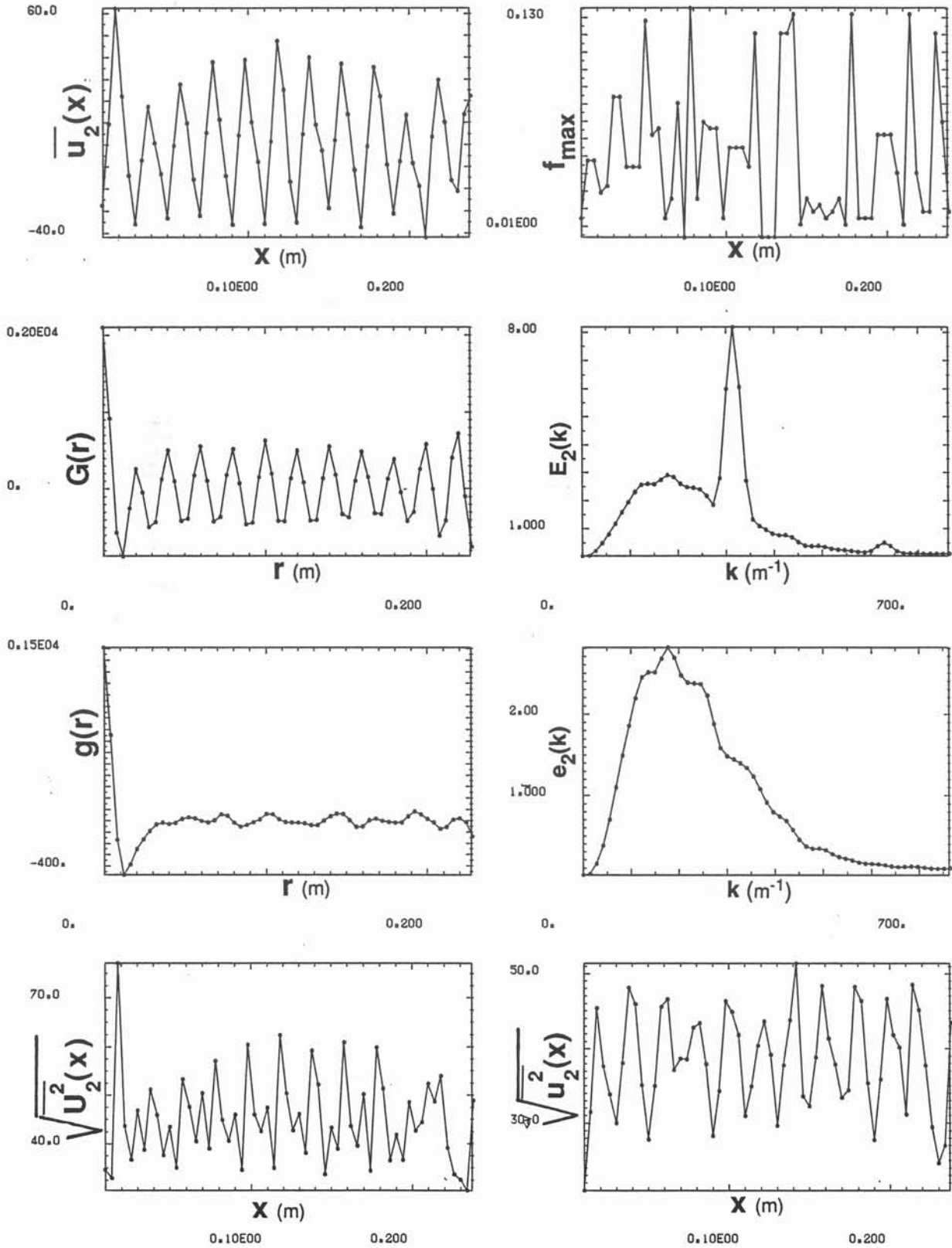


figure III-26

Rh=6.6

figure III-27



Rh=6.6

Spectre spatio-temporel

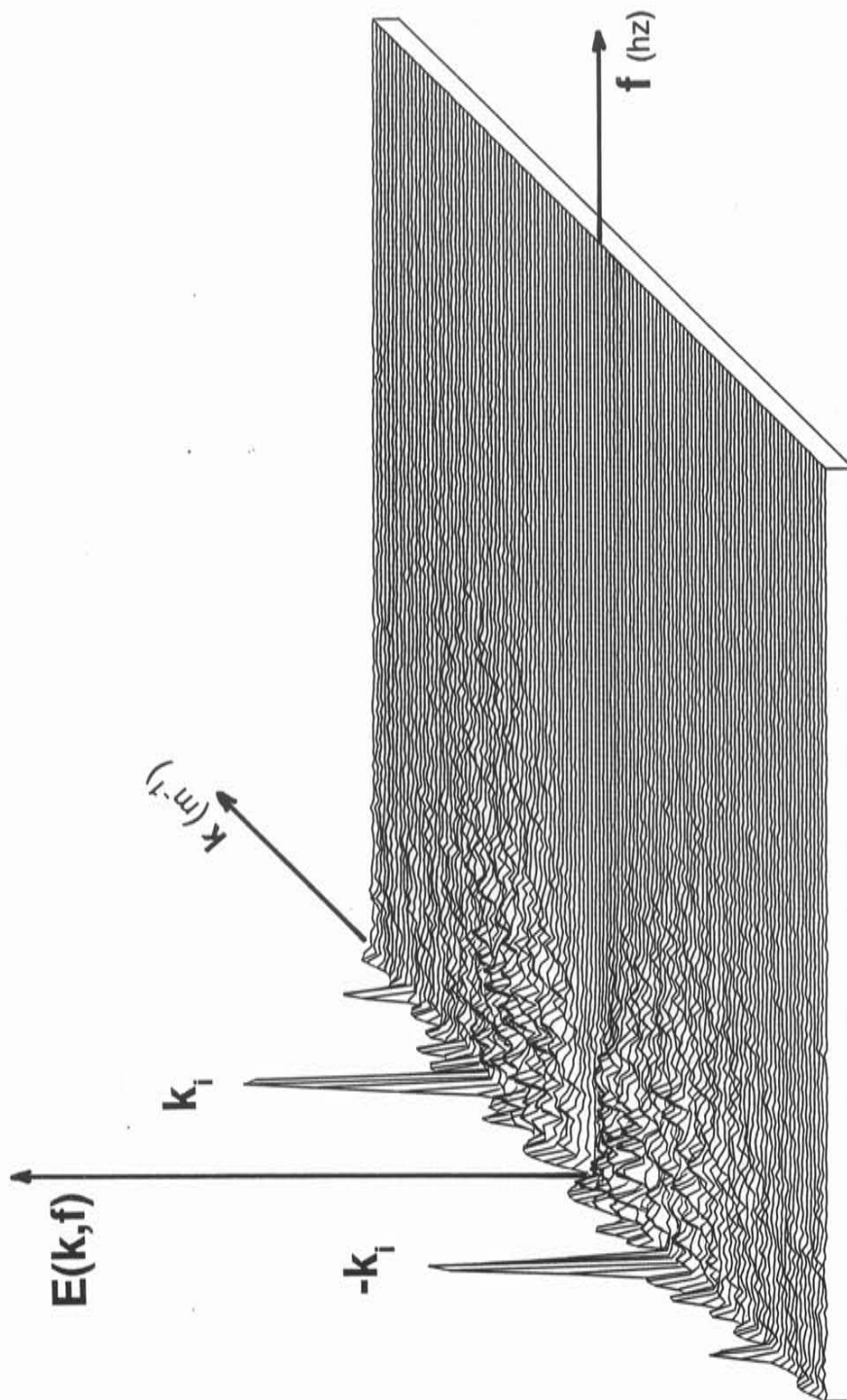


figure III-28

Cette valeur rms est fonction de Rh . Elle a été calculée avec des données provenant de diverses configurations expérimentales:

- parois circulaire (C) ou hexagonale (H) [figure III-29]
- surface libre ou rigide
- épaisseurs variées de la couche de mercure

Dans tous les cas étudiés, le comportement de rms est identique. Ceci conforte l'idée que le mécanisme d'instabilité est bidimensionnel. Le paramètre adimensionnel Rh semble bien être le paramètre de contrôle bien que le Rh critique augmente sensiblement quand on diminue le nombre de Reynolds.

Dans une des configurations, nous avons mesuré le taux de fluctuations lorsqu'on augmente Rh , puis lorsqu'on le diminue [figure III-30]. Une des propriétés importantes de cette transition est qu'elle se déroule sans hystérésis.

3-2-1. Bifurcation de Hopf

Tant que l'on reste à l'intérieur d'un intervalle de Rh proche de Rh_c , l'amplitude des oscillations suit approximativement une loi en $(Rh - Rh_c)^{1/2}$ [figure III-30]; la fréquence d'oscillation ne dépend pas de Rh . Ce comportement est caractéristique d'une bifurcation de Hopf.

3-2-2. Résonance de l'onde instable et de l'écoulement forcé

Ce phénomène de résonance correspond à un couplage relativement complexe entre ondes instationnaires et l'écoulement stationnaire de base:

La géométrie du réseau, nous laisse penser qu'une perturbation pourra se transmettre le long de trois axes indiqués sur la figure (III-26), dans le sens imposé par l'écoulement de base. La forme générale d'une perturbation sur un réseau périodique est:

$$\psi(x, y, t) = \Psi(x, y) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

ou $\Psi(x, y)$ est une fonction ayant la périodicité de l'écoulement de base [Gotoh et col. 1984].

Cette modulation de l'onde en fonction de la position relative dans le réseau est effectivement vérifiée par l'allure des courbes donnant la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vitesse en fonction de la position dans la cuve; la périodicité du réseau apparaît nettement. Cette forme de perturbation est analogue aux fonctions de Bloch, solutions de l'équation de Schrödinger, et décrivant le potentiel dans un réseau cristallin [Kittel 1983]. Ces solutions sont très utiles en physique du solide. On ramène les conditions de résonance que nous voulons établir, à un problème de résonance entre ondes planes linéaires.

Pour des raisons de symétrie ces ondes de directions de propagation différentes auront même nombre d'onde k_0 et même fréquence f_{ac} :

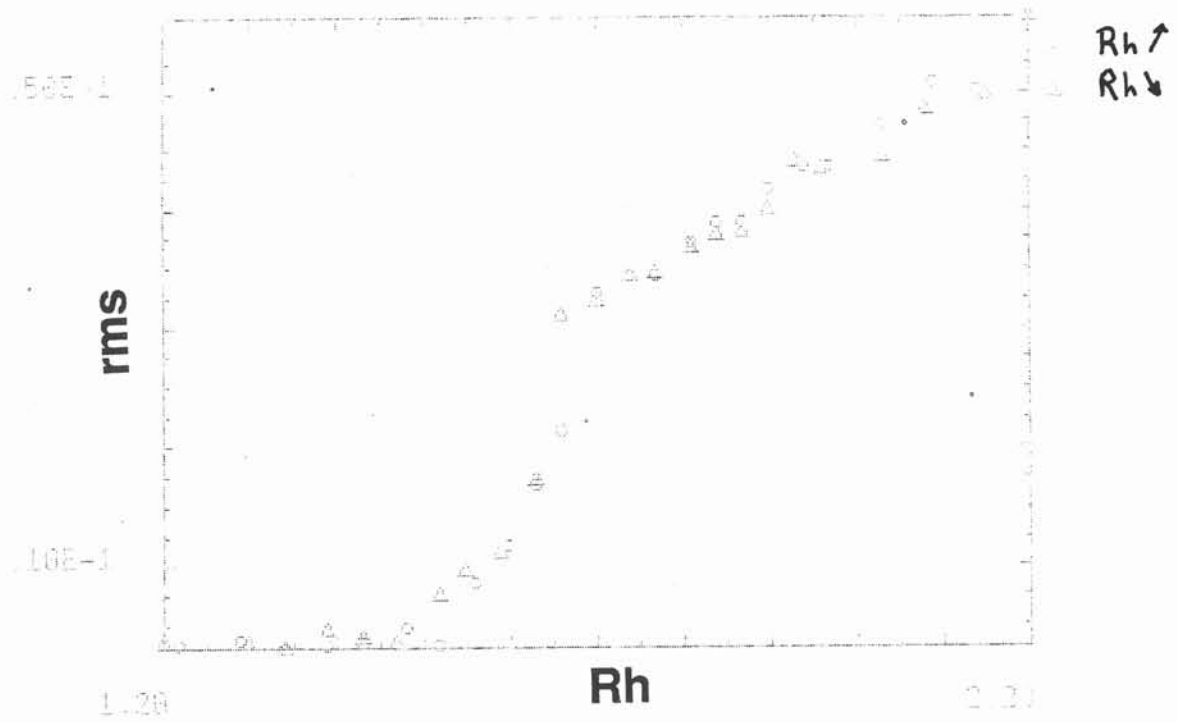


figure III-30

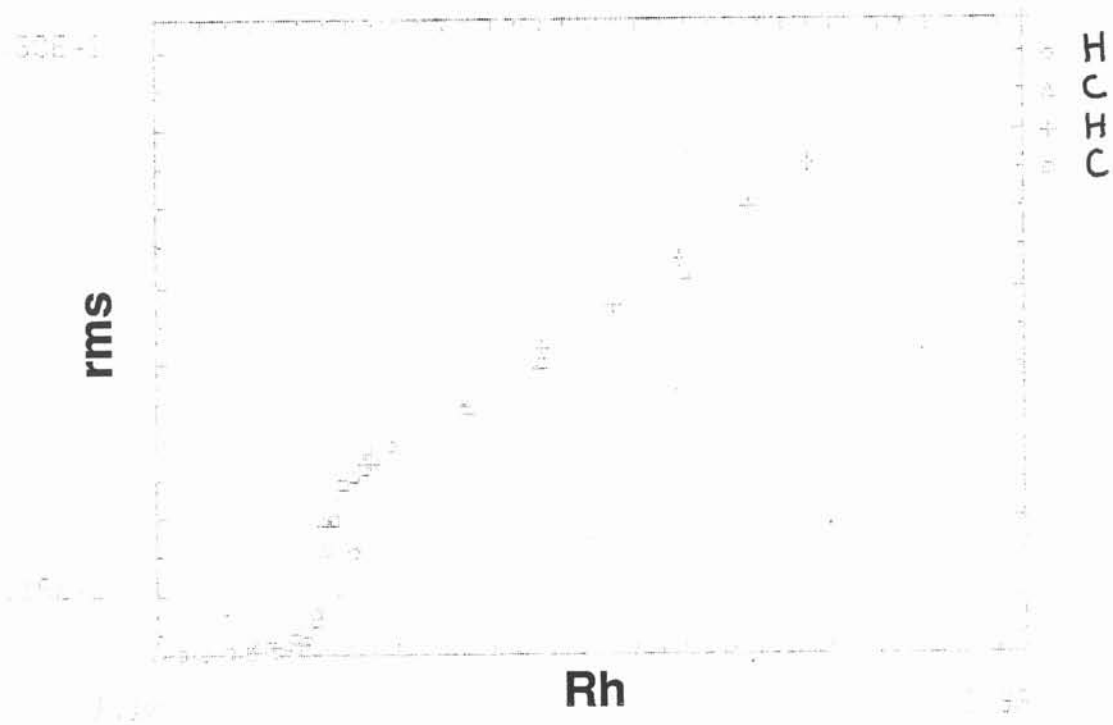


figure III-29

$$\begin{aligned} o1 &: (k_0 \mathbf{re}_1, -2\pi f_{ac} t) \\ o2 &: (k_0 \mathbf{re}_2, -2\pi f_{ac} t) \\ o3 &: (k_0 \mathbf{re}_3, -2\pi f_{ac} t) \end{aligned}$$

Le réseau de base est donné par :

$$\begin{aligned} r1 &: (k_i \mathbf{re}_1, 0) \\ r2 &: (k_i \mathbf{re}_2, 0) \\ r3 &: (k_i \mathbf{re}_3, 0) \end{aligned}$$

Une résonance entre l'onde o1 et l'ensemble des autres ondes peut exister si:

$$\begin{aligned} m k_0 \mathbf{e}_1 + n k_0 \mathbf{e}_2 + p k_0 \mathbf{e}_3 + r k_i \mathbf{e}_1 + s k_i \mathbf{e}_2 + t k_i \mathbf{e}_3 &= k_0 \mathbf{e}_1 \\ -m 2\pi f_{ac} - n 2\pi f_{ac} - p 2\pi f_{ac} &= -2\pi f_{ac} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} m+n+p &= 1 \\ k_0(m-(n+p)/2) + k_i(r-(s+t)/2) &= k_0 \\ (n-p) k_0 + (s-t) k_i &= 0 \end{aligned}$$

On cherche à faire intervenir les harmoniques à l'ordre le plus bas:

*si $n=p=0$, il n'y a pas de couplage

*si $n=p=1$, alors

$$\begin{aligned} m &= -1 \\ s &= t \\ k_i(r-s) &= 3k_0 \end{aligned}$$

Avec $s=t=0$, on voit que les ondes excitées entrent en résonance avec le forçage périodique lorsque $k_0 = k_i / 3$. Cette interprétation est en accord avec les spectres mesurés. Les autres nombres d'onde perturbés se déduisent d'interaction entre l'onde de perturbation et l'écoulement moyen:

$$(k_i/3 \mathbf{e}_1, 2\pi f_{ac} t) + (k_i \mathbf{e}_1, 0) = (4/3 k_i \mathbf{e}_1, 2\pi f_{ac} t)$$

$$(k_i/3 \mathbf{e}_1, 2\pi f_{ac} t) - (k_i \mathbf{e}_1, 0) = (-2/3 k_i \mathbf{e}_1, 2\pi f_{ac} t)$$

3-3. Les Modèles Théoriques

Les écoulements périodiques sont pour les théoriciens le moyen d'appréhender des champs de vitesse avec une géométrie non triviale et étendue. La stabilité de toute une variété de tels écoulements de base a été abordée en dimension 1, 2 ou 3 - Kolmogorov , Beltrami. L'expérience que nous avons étudiée est intéressante dans ce contexte.

L'approche théorique de l'instabilité d'écoulements cellulaires utilise généralement la séparation d'échelles: L'écoulement est forcé à petite échelle et on s'intéresse à la croissance d'une perturbation à une échelle beaucoup plus grande. Sivashinsky (1985), en utilisant une méthode de ce type, prédit l'apparition d'un mouvement à grande échelle dans un écoulement type Kolmogorov et à partir d'un réseau carré de tourbillons. L'instabilité qui se développe est connue sous le nom de viscosité négative car le taux de croissance du nombre d'onde le plus amplifié est en k^2 . Par contre le coefficient de viscosité est toujours positif pour un réseau de base triangulaire tel que nous l'avons décrit. La différence de comportement entre les résultats expérimentaux de Sommeria (1985) et les nôtres se retrouvent dans ce calcul théorique. Cependant ce modèle n'explique pas l'apparition des ondes que l'on mesure. D'autre part le taux de croissance en k^2 semble contradictoire avec l'hypothèse faite pour séparer les échelles.

Un autre modèle utilisant des arguments plus généraux a été proposé par Frisch et col(1987). Par analogie avec l'effet α en magnétohydrodynamique [Moffatt 1978], des écoulements suffisamment anisotropes peuvent présenter une instabilité à grande échelle. La condition est la non invariance par parité, c'est-à-dire la non-invariance lorsqu'on effectue un renversement simultané de la position et de la vitesse. La séparation d'échelle est aussi nécessaire dans ce cas: Un écoulement à petite échelle est perturbé par un écoulement moyen; ce dernier est considéré localement comme uniforme et constant. On peut ainsi extraire une équation pour l'écoulement moyen. Les auteurs montrent qu' en dimension 3 une instabilité AKA (Anisotropic Kinetic Alpha effect) peut se développer avec un taux de croissance proportionnel à k . Par contre dans un écoulement bidimensionnel, seuls des effets dispersifs apparaissent.

Nous n'avons donc pas de description théorique expliquant le mécanisme créant les ondes de perturbation.

4. Les régimes à forts Rh avec la paroi hexagonale

Pour les faibles valeurs de Rh , les écoulements forcés en boîte hexagonale ou circulaire présentaient une ressemblance assez forte sur le plan qualitatif et même quantitatif. Pour les plus grandes valeurs de Rh possibles avec l'outil expérimental dont nous disposons, il apparaît une différence flagrante entre les deux configurations de parois. Dans le cas avec paroi circulaire, un régime turbulent est obtenu et on reliera les résultats aux théories de la turbulence bidimensionnelle dans le chapitre IV. Pour l'instant, on ne situe pas bien à quel moment on doit différencier les deux situations.

Partons de la situation à $Rh=6.6$ [Figures III- 27,28 et 29]; le signal de vitesse au centre de la cuve et le spectre temporel associé montrent que les fluctuations de l'écoulement sont chaotiques. La courbe $f_{\max}(x)$ indique que la fréquence des perturbations les plus amplifiées n'est pas du tout régulière en fonction des différents points de la cuve. De plus on ne distingue aucun nombre d'onde particulièrement privilégié. A $Rh=9.5$ [Figures III-31,32 et 33] on note un début d'organisation sur la courbe $f_{\max}(x)$; aux points ayant une position équivalente dans le réseau, on mesure des fréquences voisines d'oscillations. Les spectres spatiaux et spatio-temporel demeurent difficiles à déchiffrer. A $Rh=11.6$ [Figures III-34,35 et 36] une nette évolution est observée. La majorité des points de mesure indiquent une même fréquence pour la perturbation la plus amplifiée. Un ordre spatial commence à poindre sur un fond de bruit turbulent. Les nombre d'onde k_0 , $-2 k_0$ et $4 k_0$ sont de nouveau favorisés. La fonction $g(r)$ montre encore que les corrélations sont encore timides à grandes distances. Lorsqu'on arrive à $Rh=14.6$ [Figures III-37,38 et 39] , les choses sont parfaitement claires; nous observons à nouveau un blocage d'une onde excitée avec le réseau périodique de forçage. Cette situation est beaucoup plus nette qu'en 3-1-4. La fonction $g(r)$ montre que la corrélation s'étend sur toute la cuve. Deux cas sont encore présentés à $Rh=16.8$ [Figures III-40,41 et 42] et $Rh=18.2$ [Figures III-43,44 et 45] pour montrer que cette résonance va en s'intensifiant.

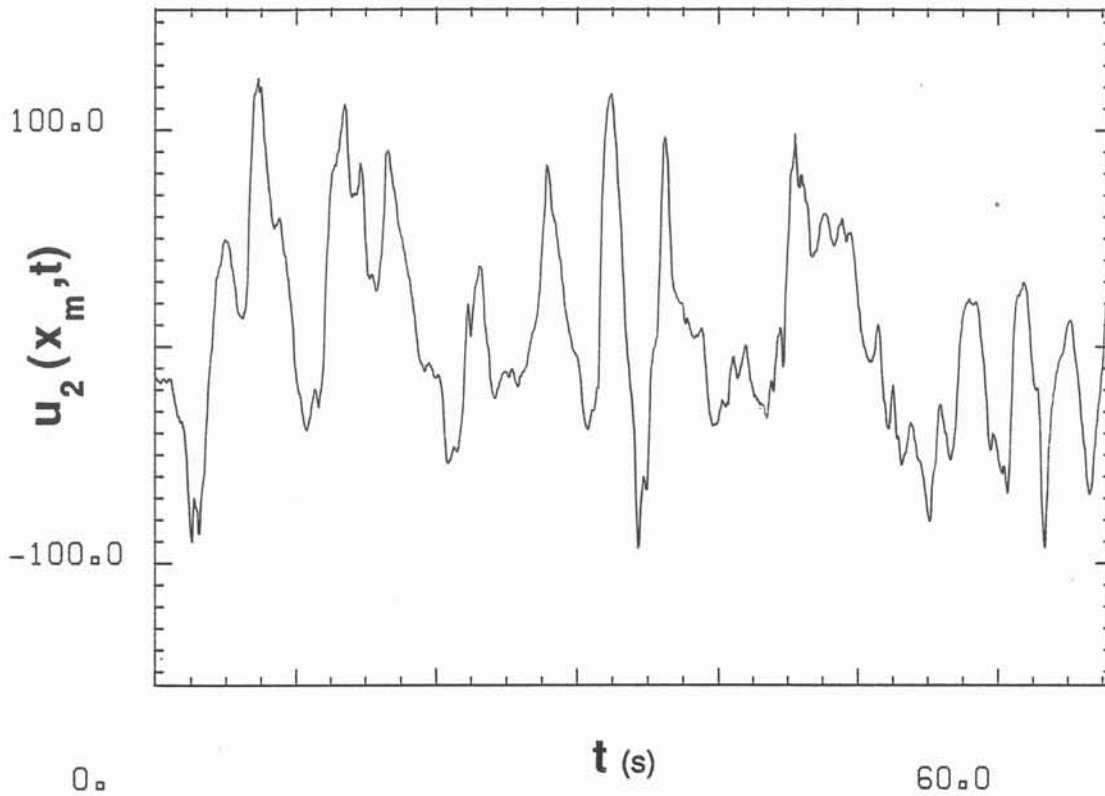
On remarquera que la fréquence évolue avec Rh . Le tableau III-1 montre que la fréquence est directement liée à la vitesse quadratique moyenne.

Tableau III-1:

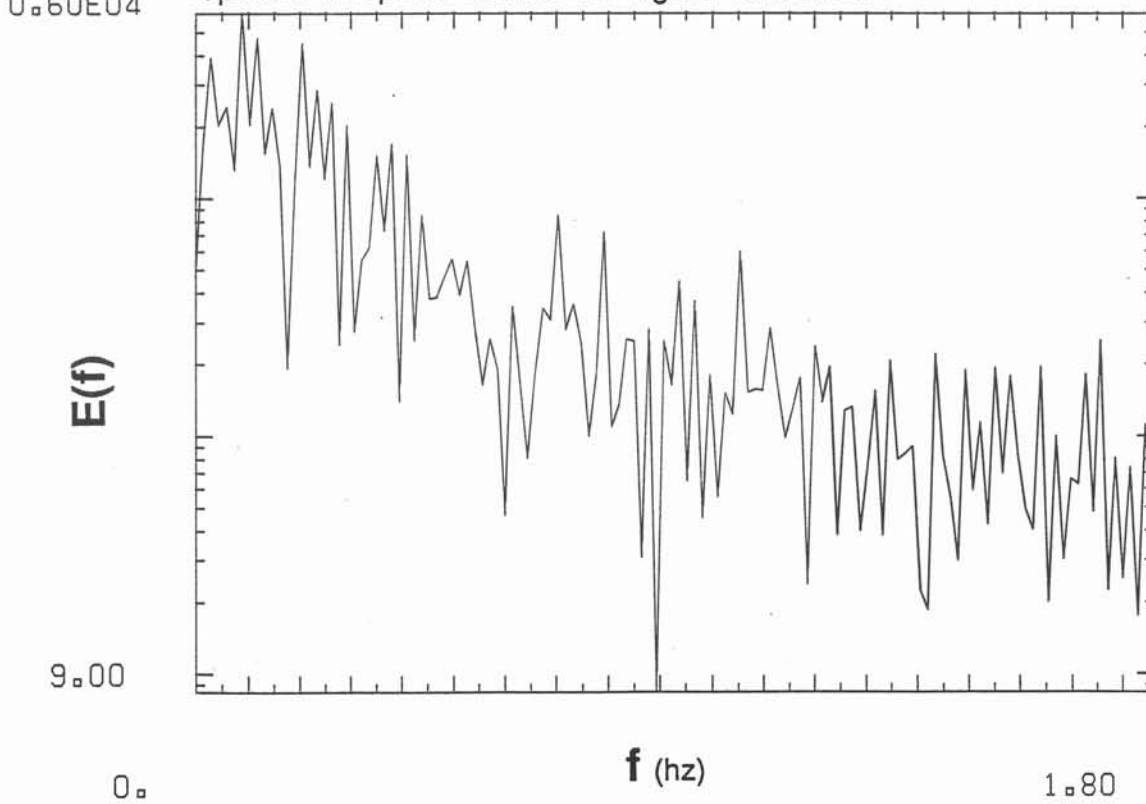
Rh	11.6	14.6	16.8	18.2
vitesse quadratique moyenne v (m/s)	.0118	.0154	.0178	.0197
fréquence f de l'onde (Hz)	.271	.374	.439	.483
Longueur L $L=v/f$.0435	.0412	.0405	.0409

Rh=9.5

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

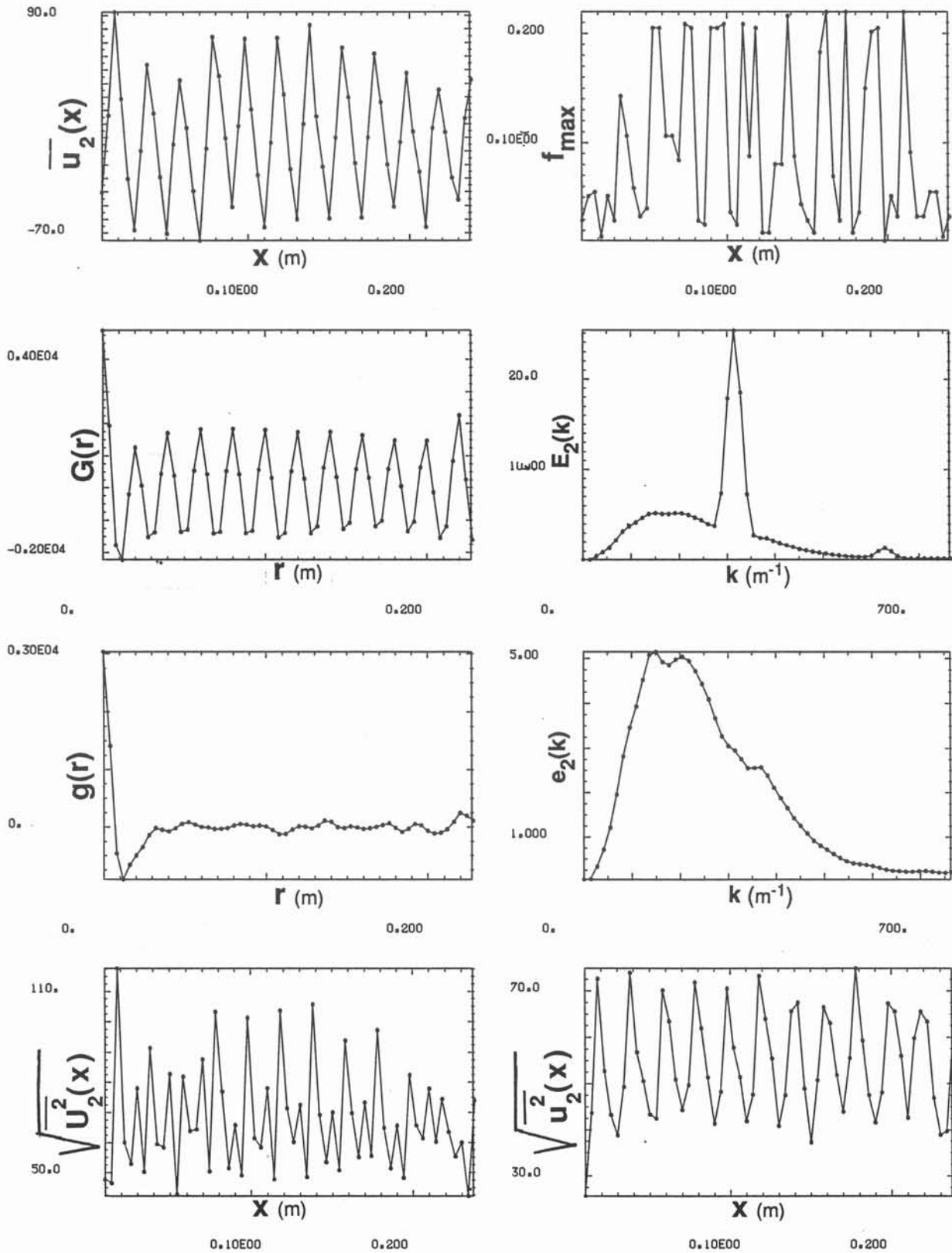


spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

**figure III-31**

Rh=9.5

figure III-32



Rh=9.5

Spectre spatio-temporel

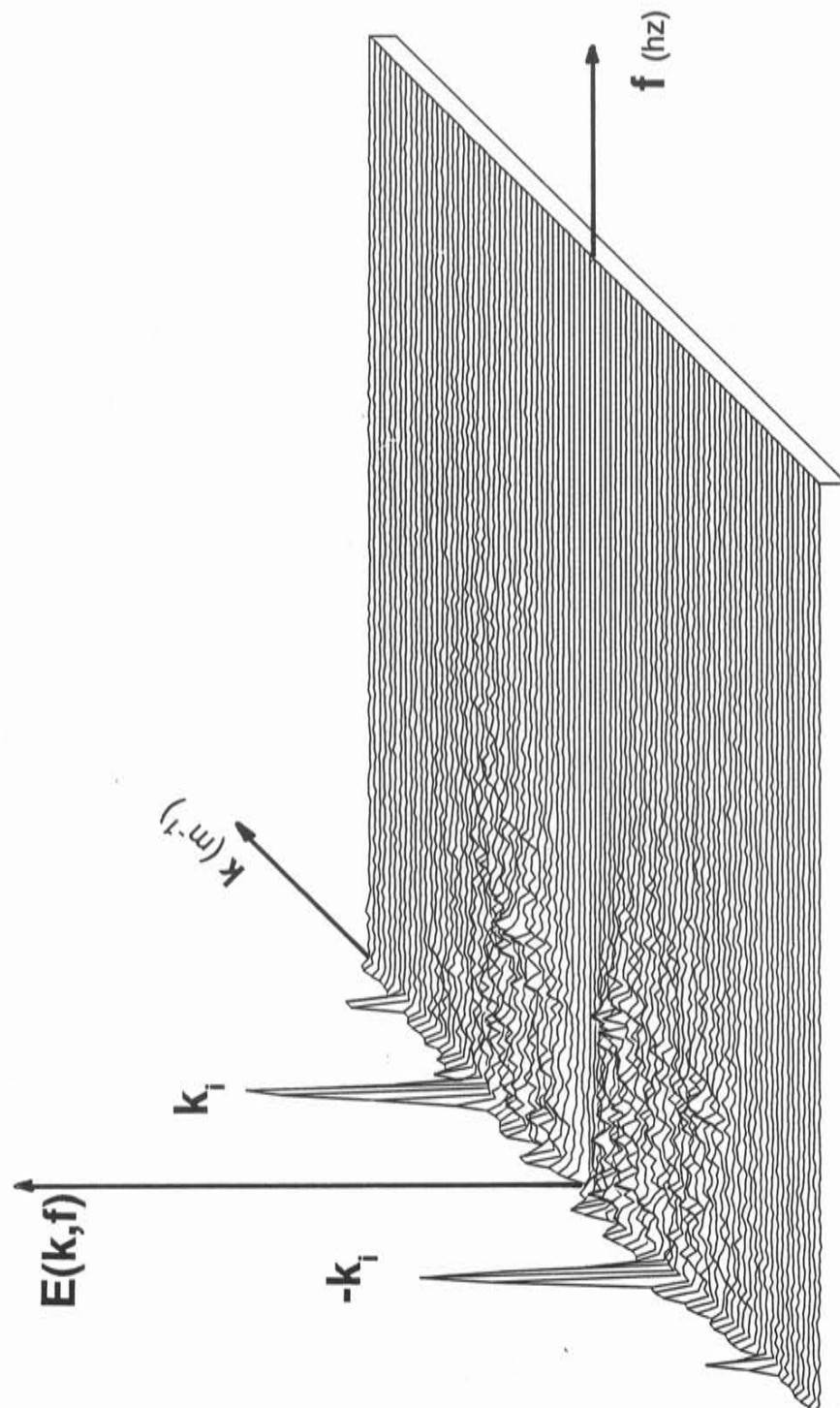
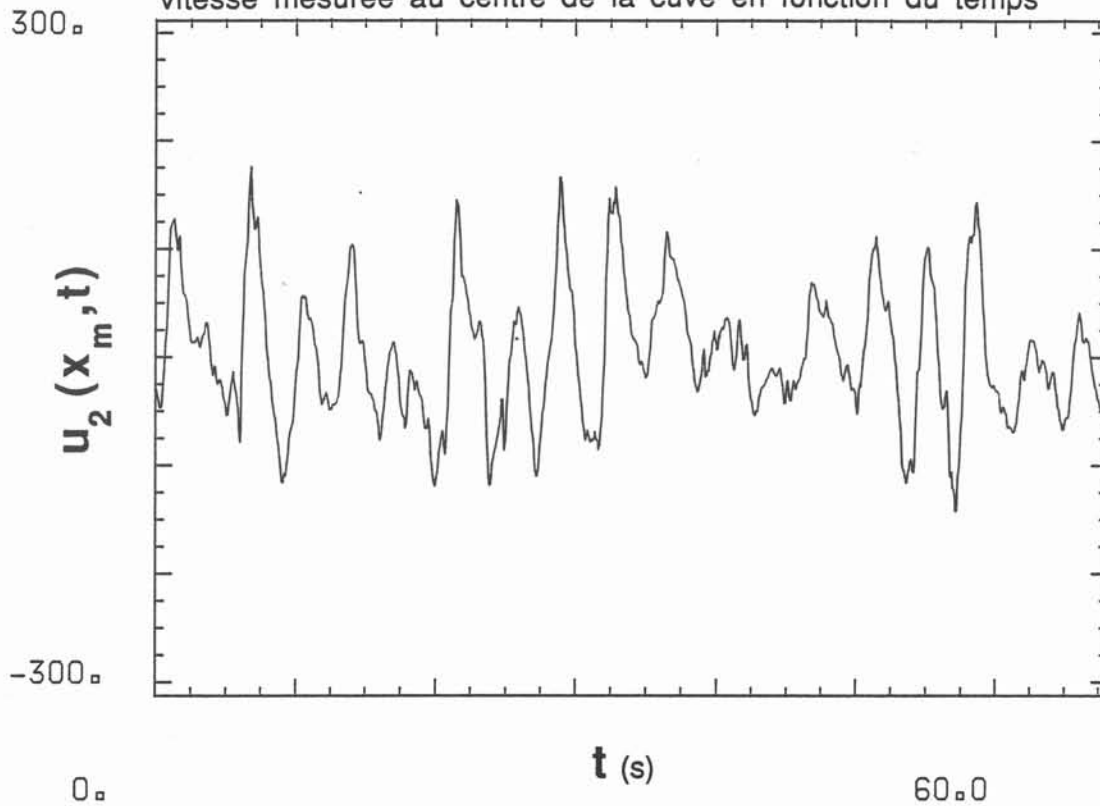


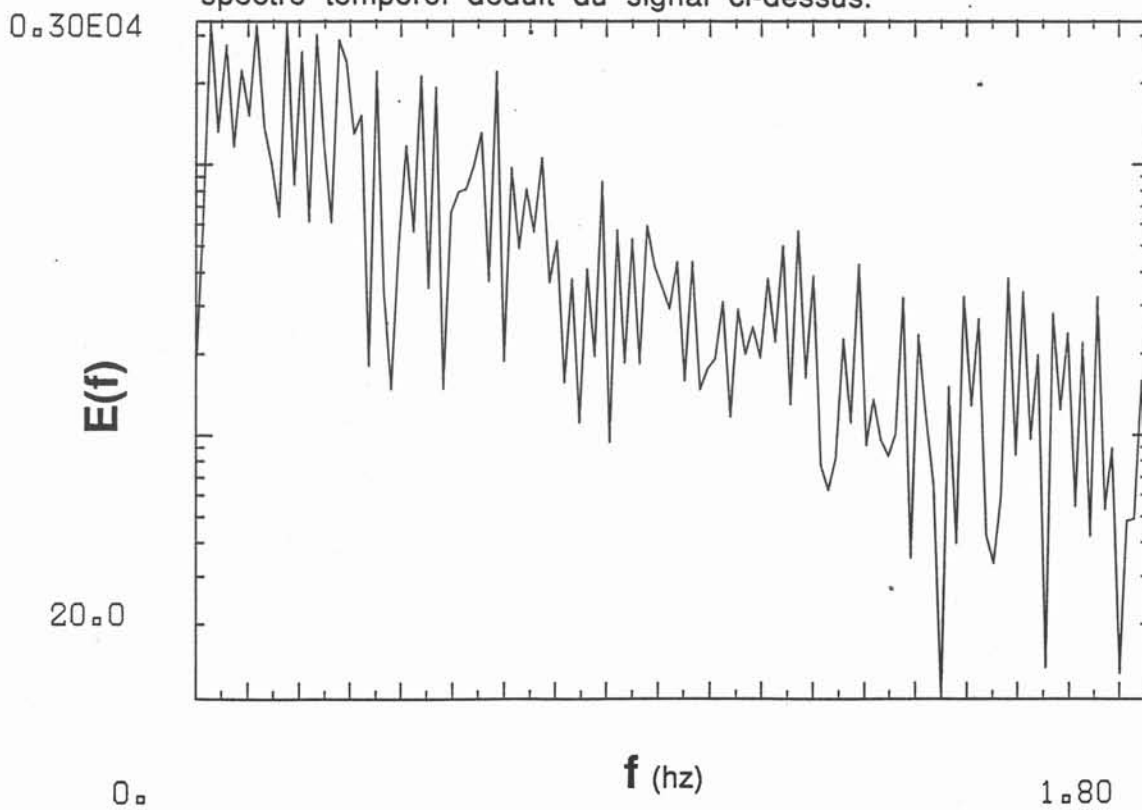
figure III-33

Rh=11.6

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

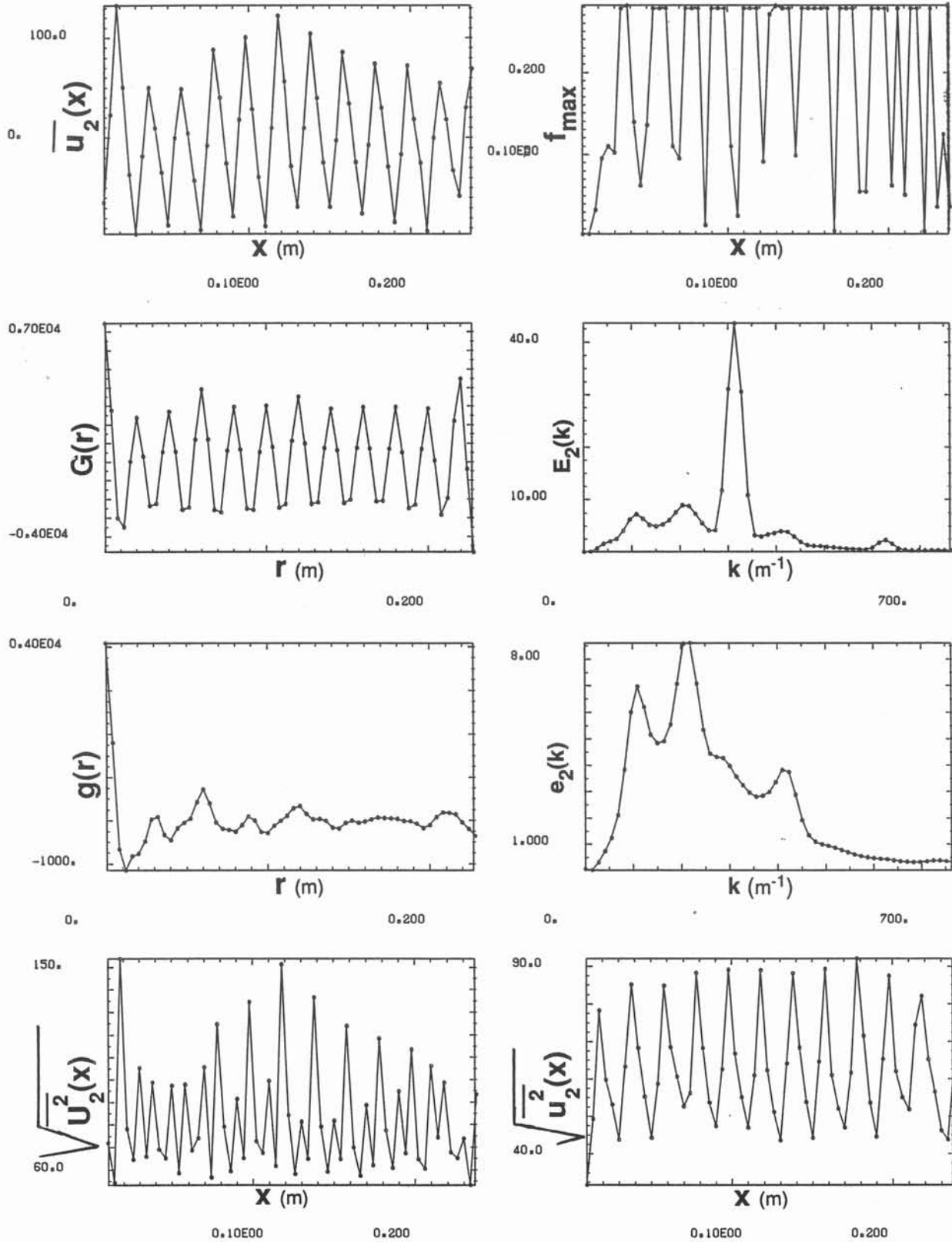


spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

**figure III-34**

Rh=11.6

figure III-35



Spectre spatio-temporel

$Rh=11.6$

$2k_0$

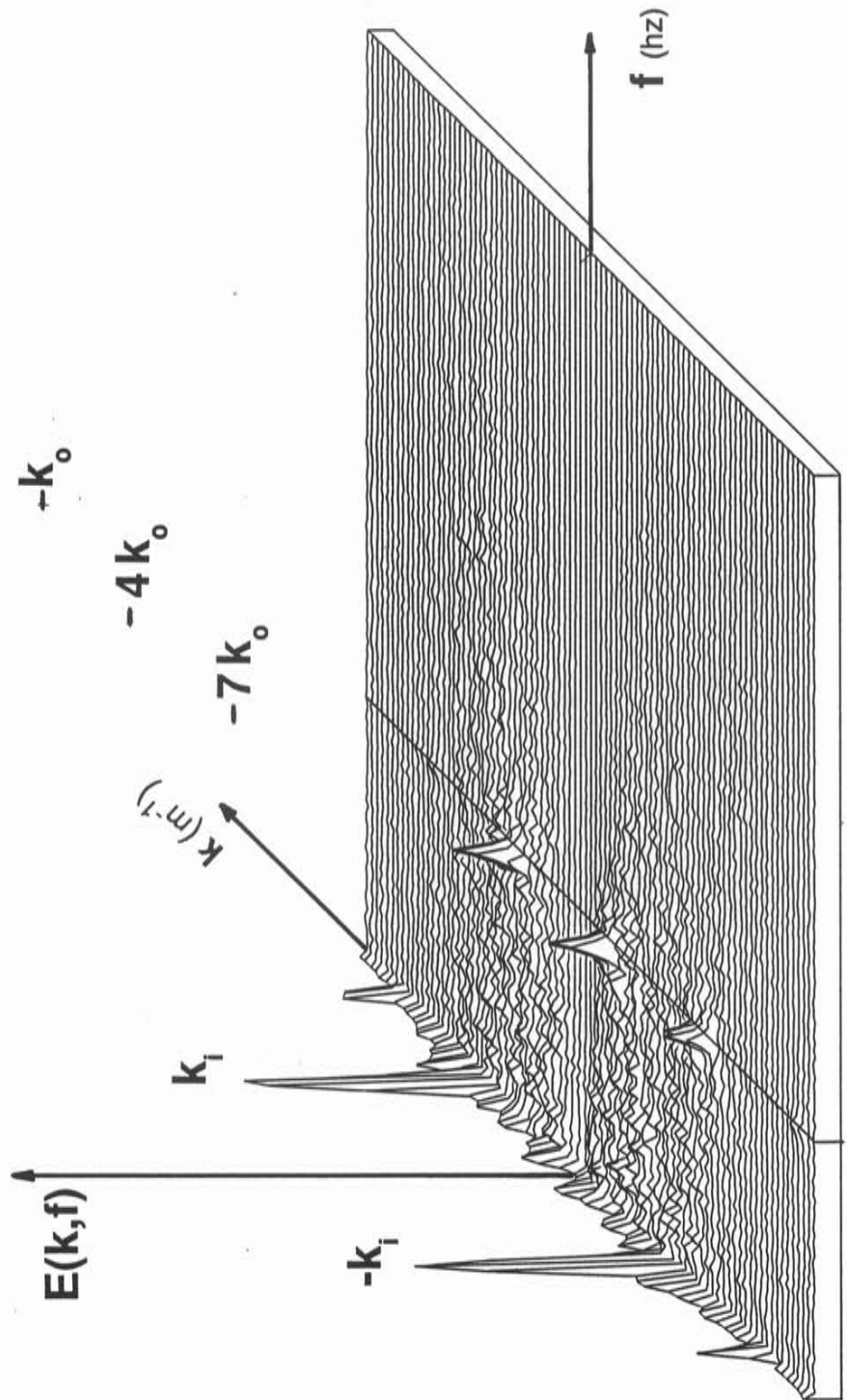
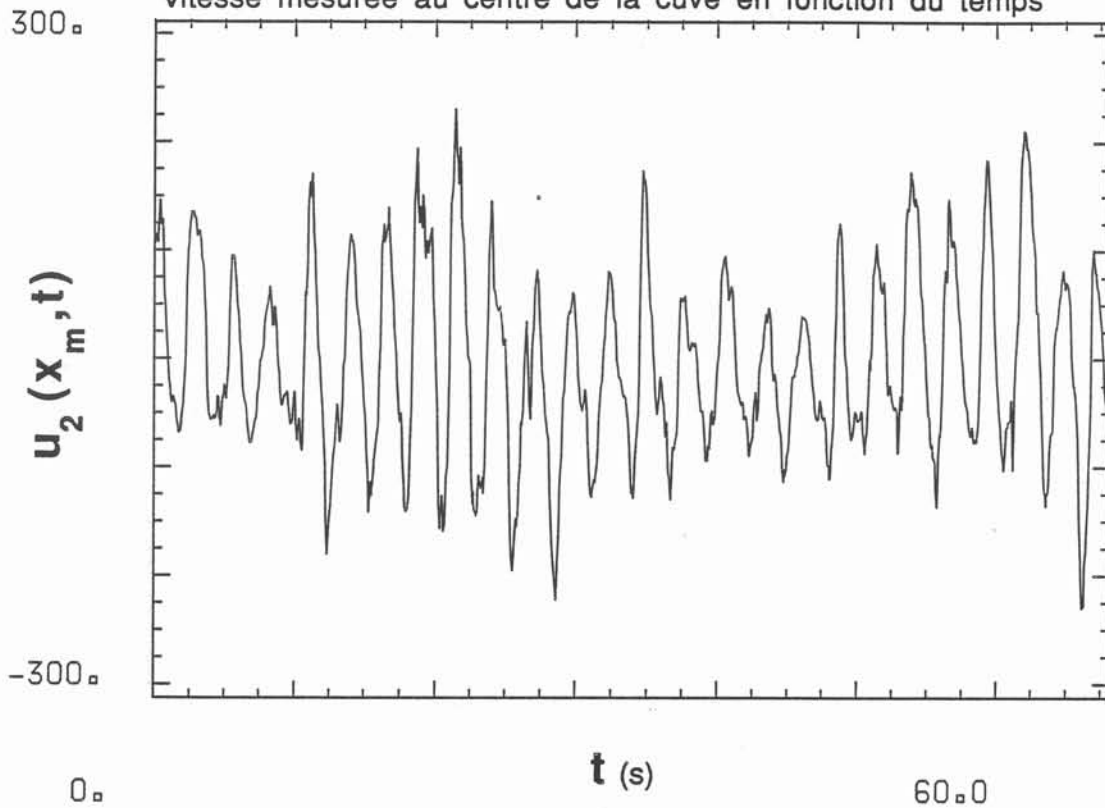


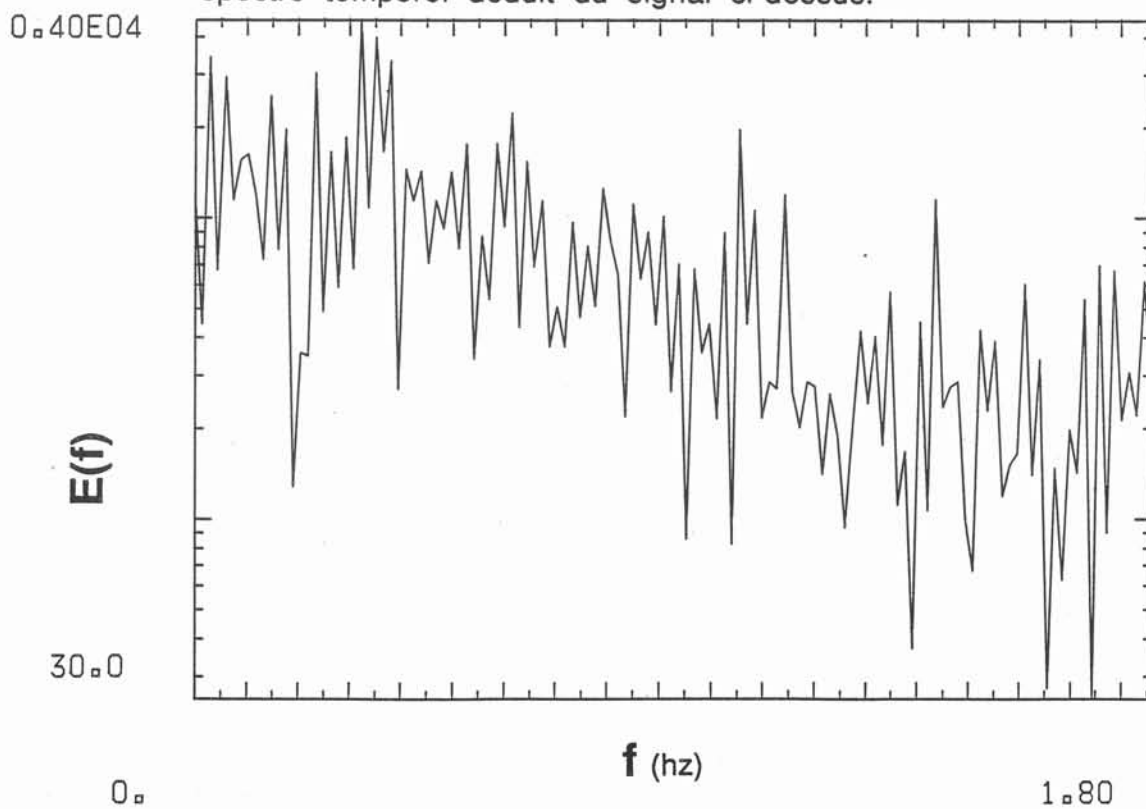
figure III-36

Rh=14.6

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

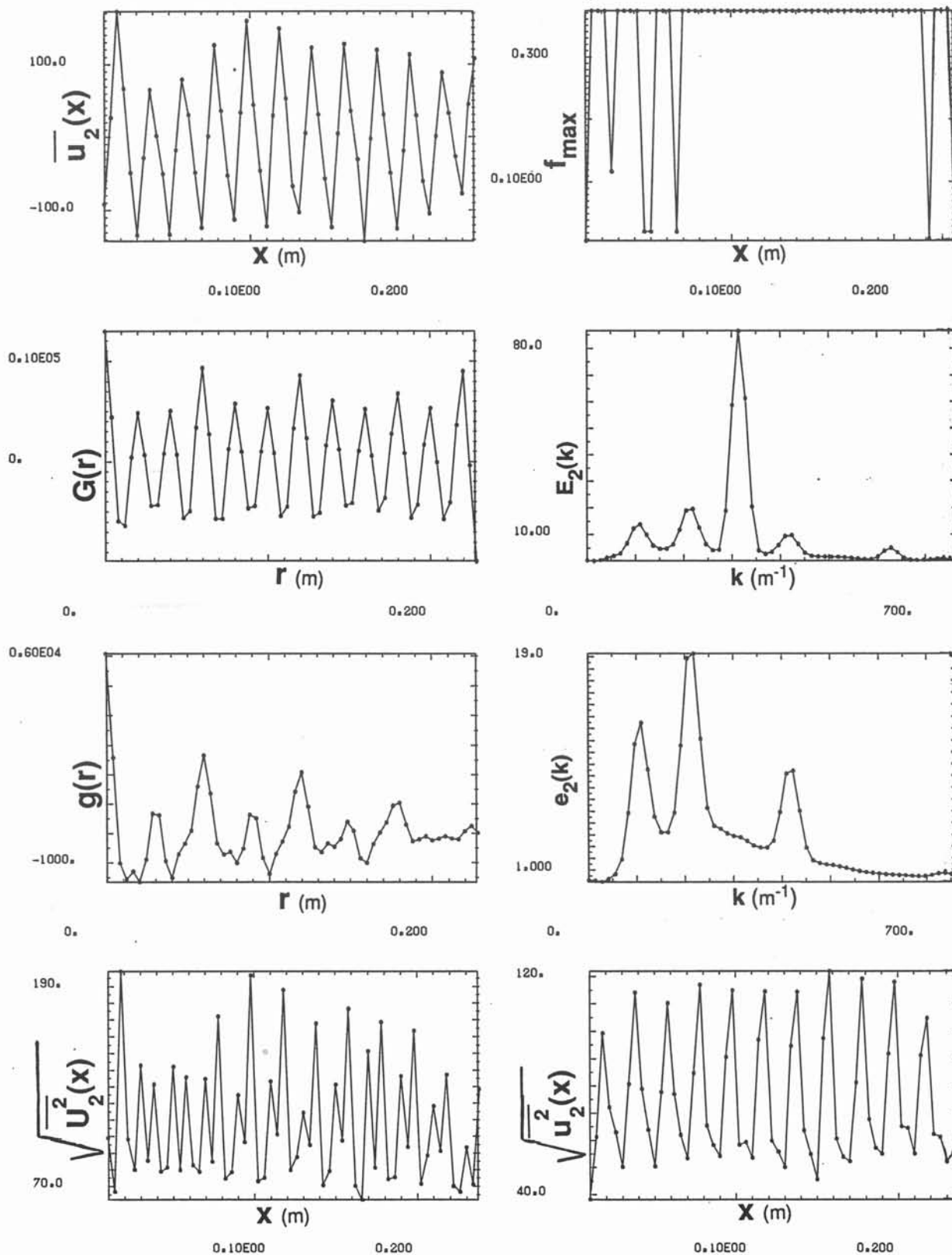


spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

**figure III-37**

Rh=14.6

figure III-38



Spectre spatio-temporel

$Rh=14.6$

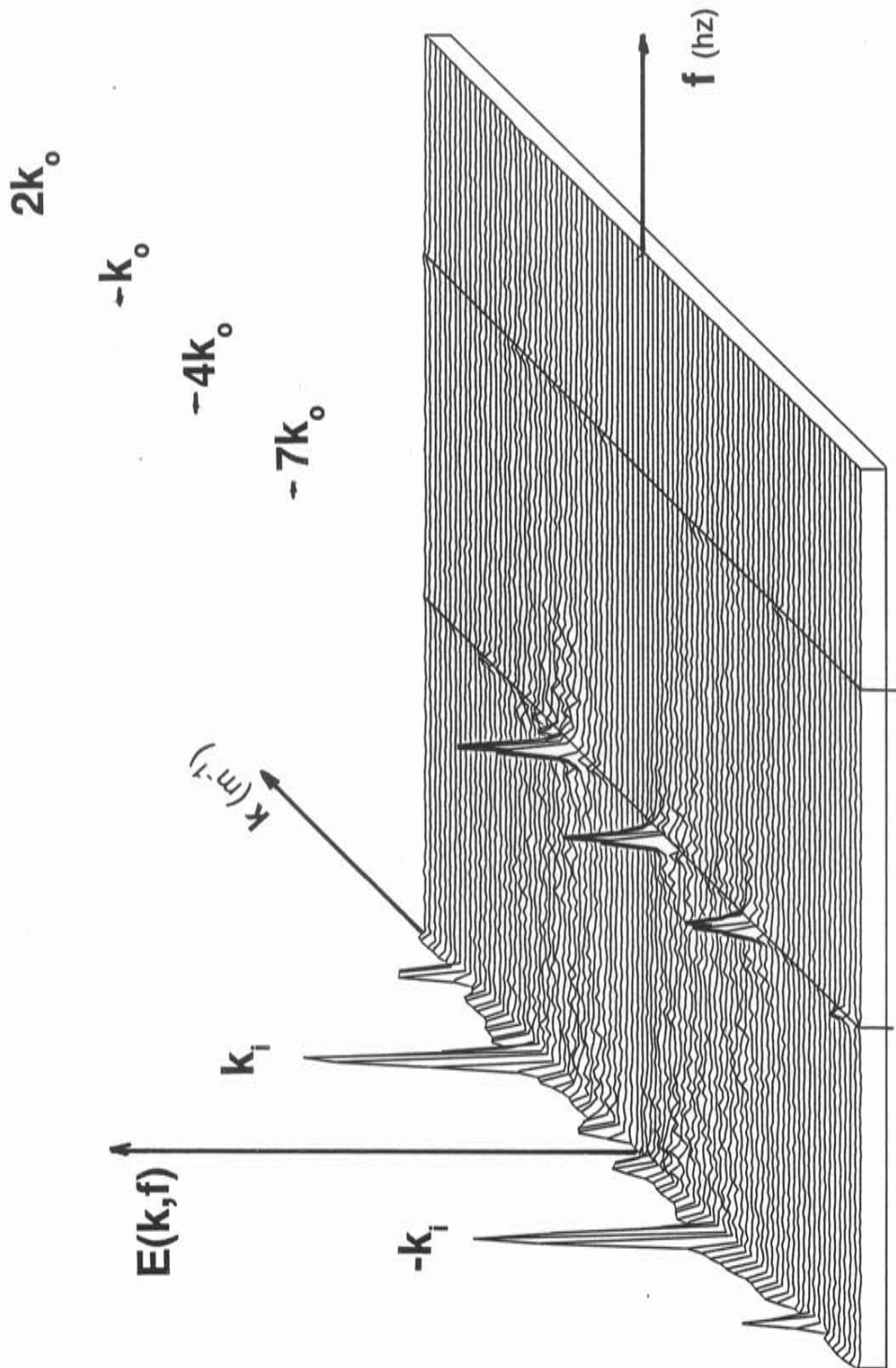
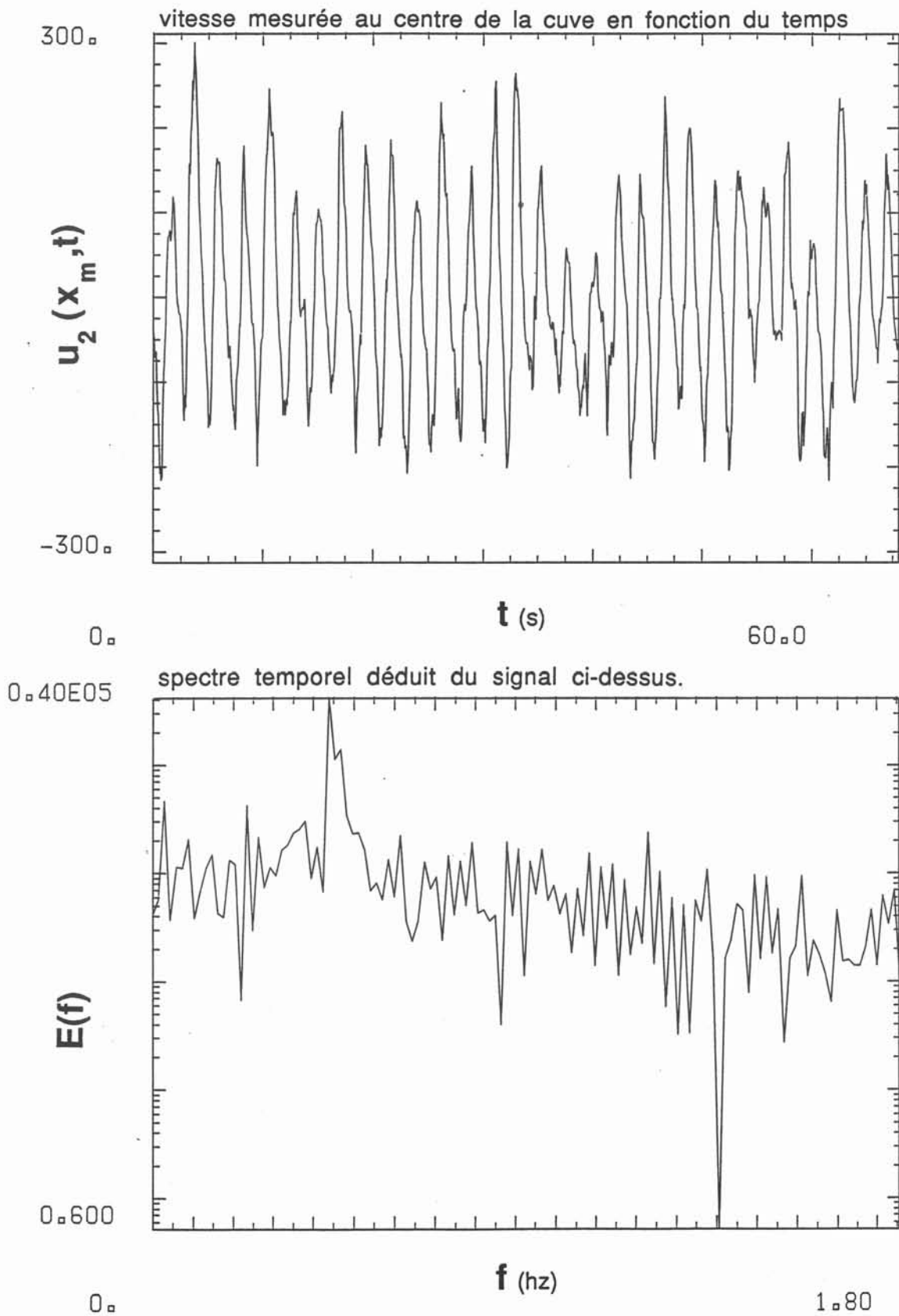
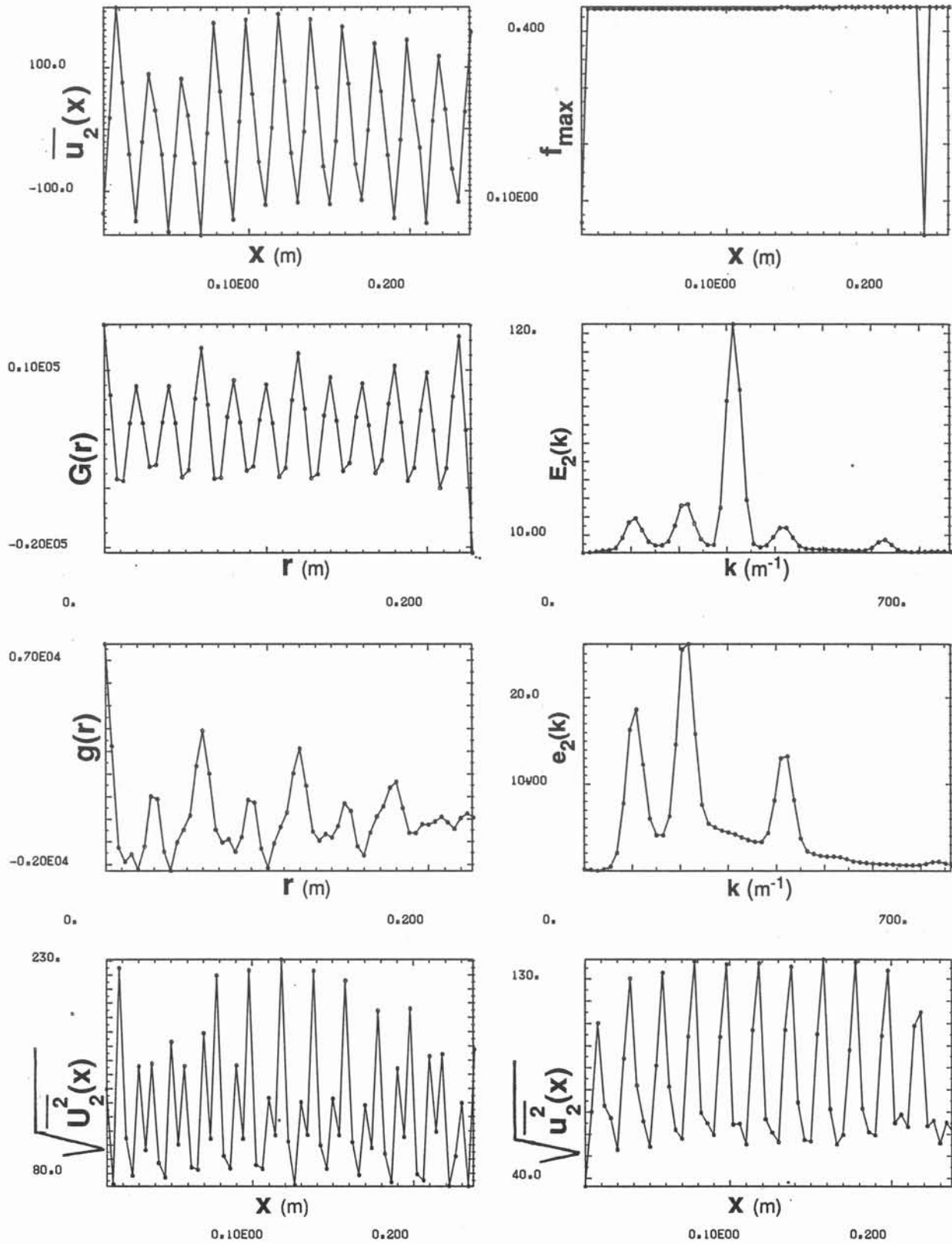


figure III-39

Rh=16.8**figure III-40**

Rh=16.8

figure III-41



Spectre spatio-temporel

$Rh=16.8$

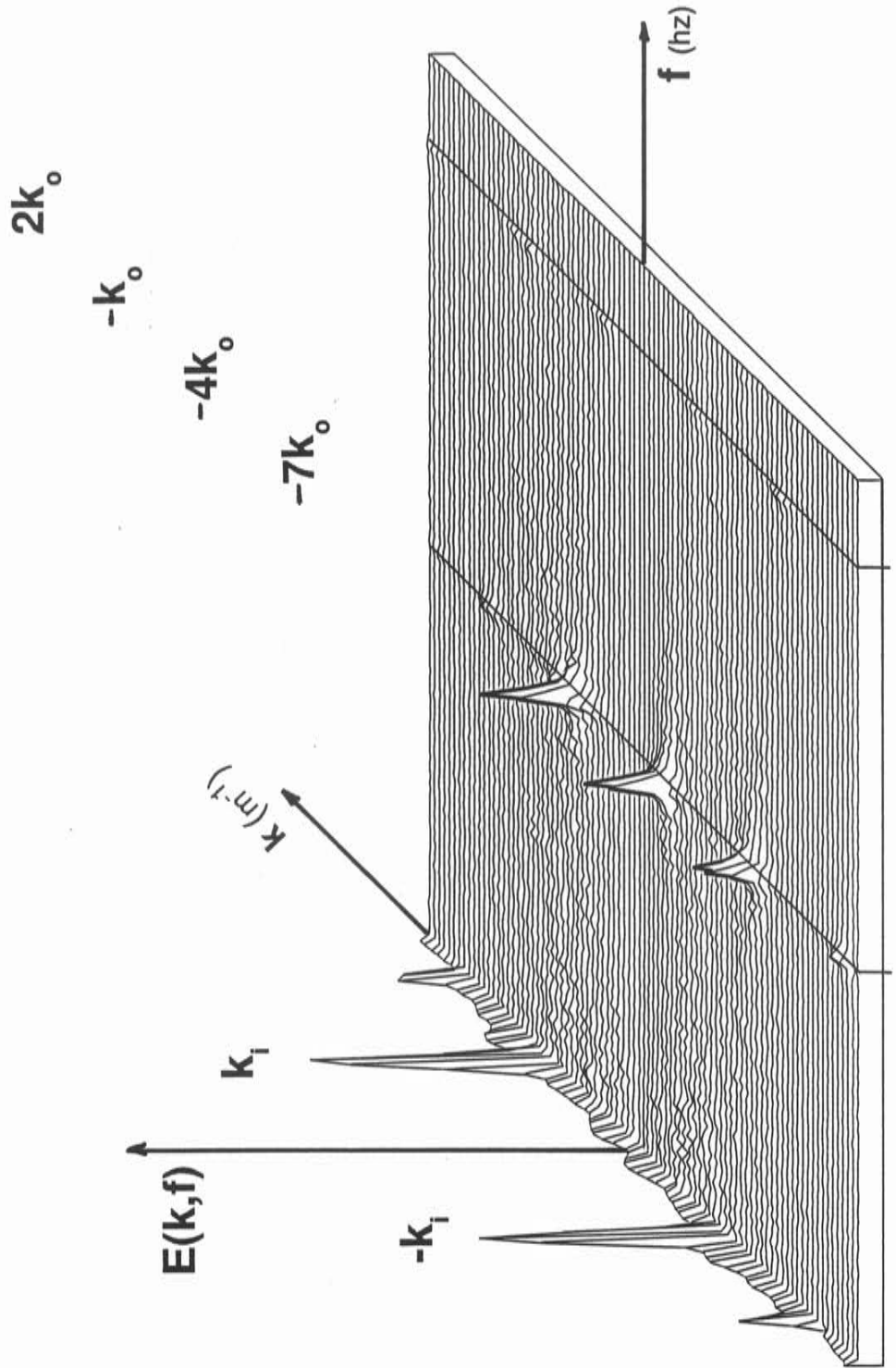
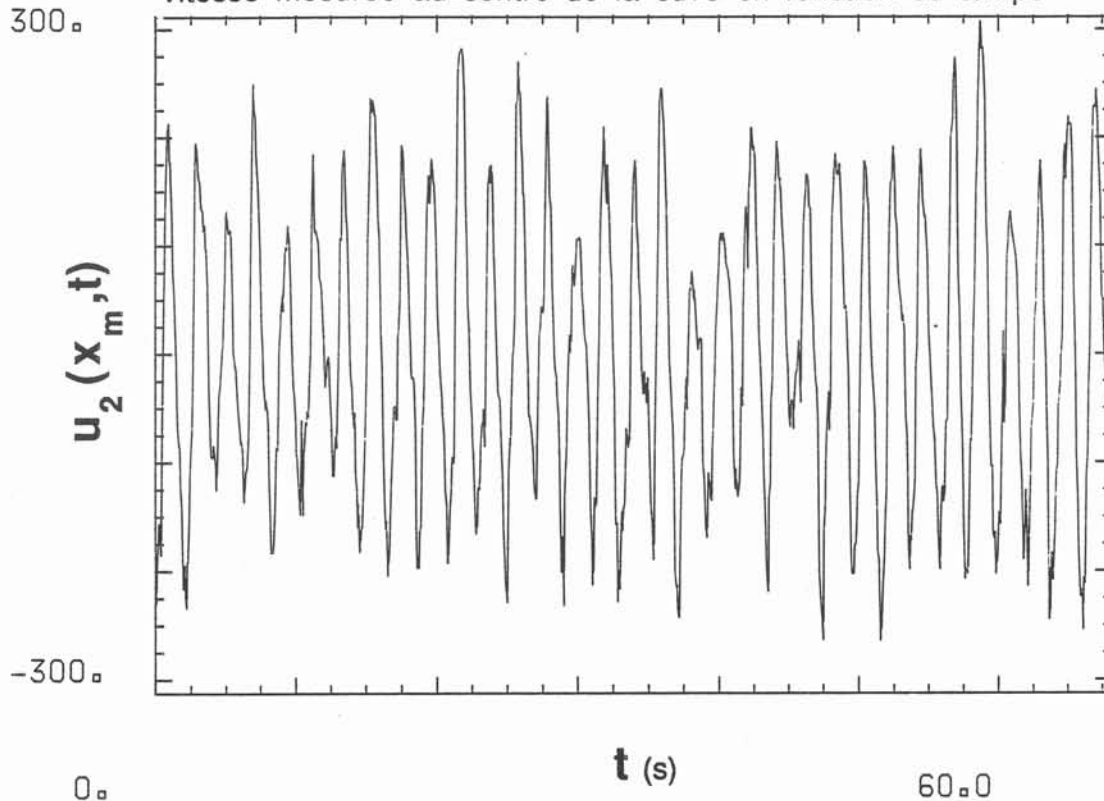


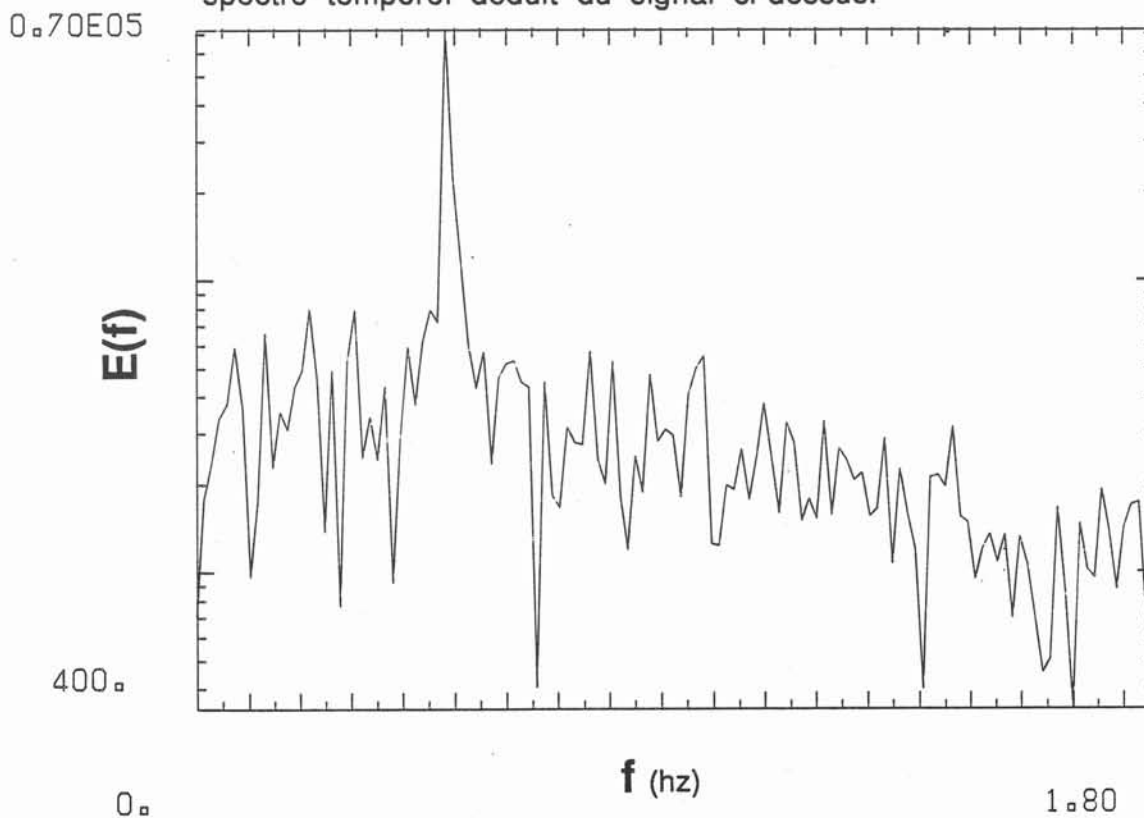
figure III-42

Rh=18.2

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps

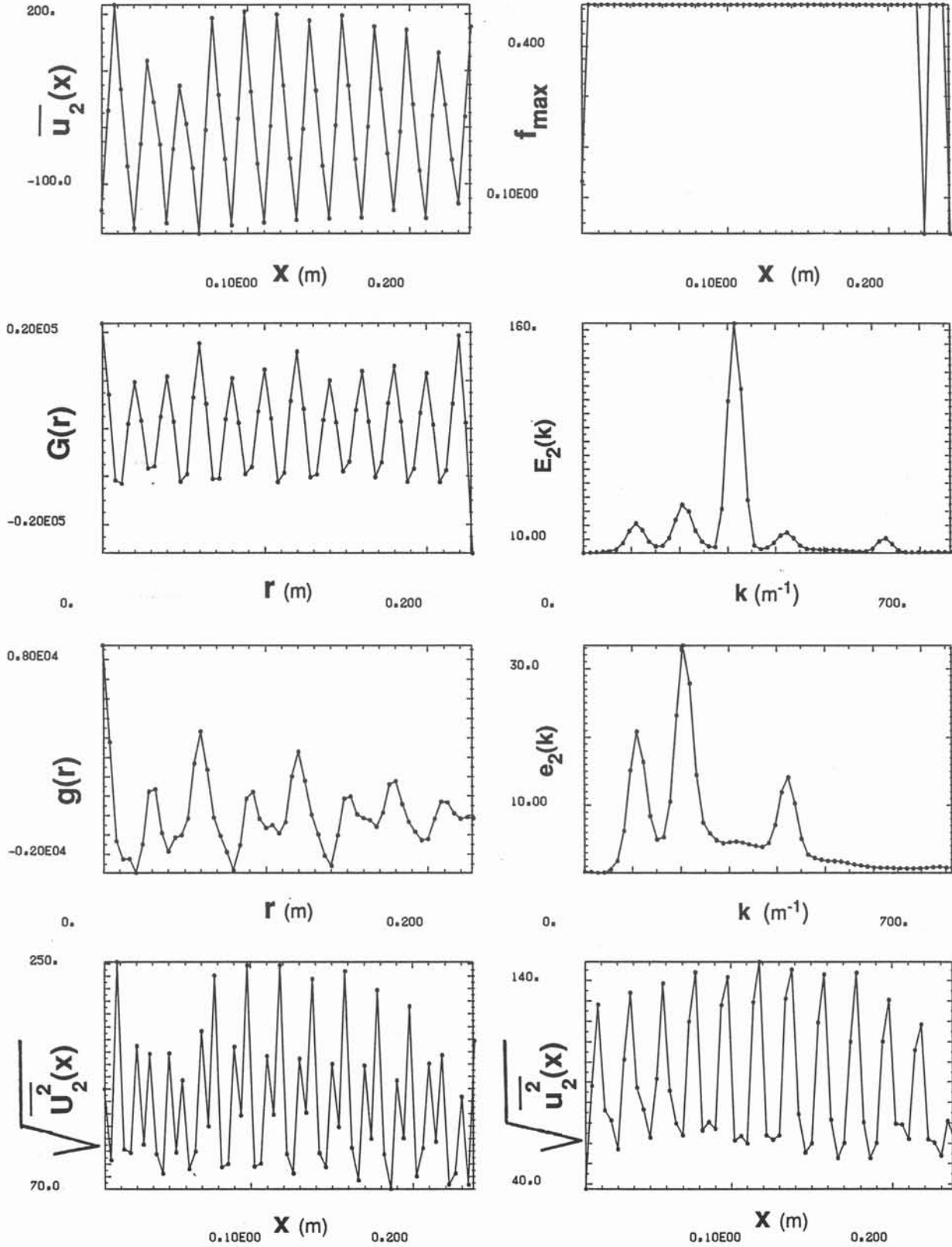


spectre temporel déduit du signal ci-dessus.

**figure III-43**

Rh=18.2

figure III-44



Spectre spatio-temporel

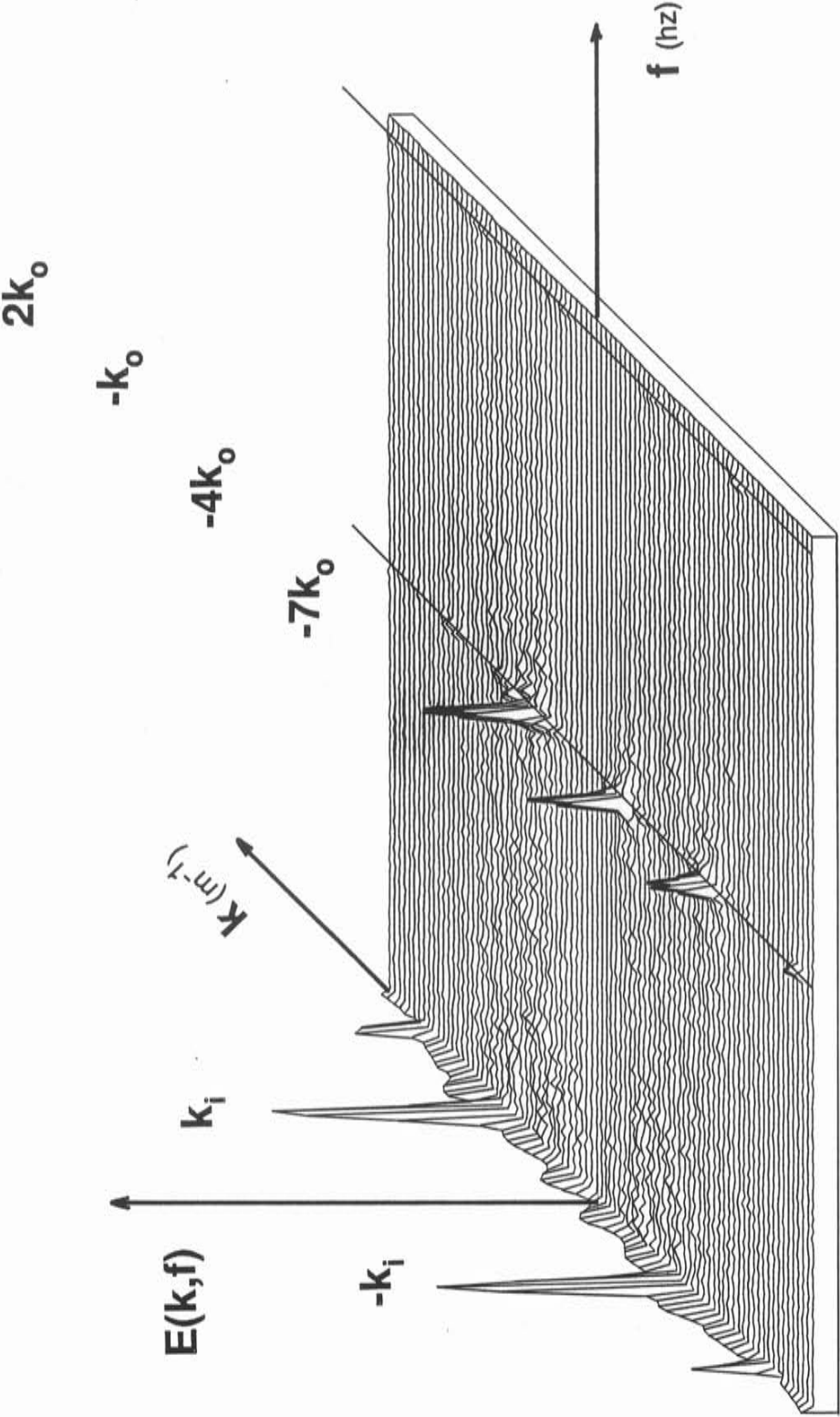


figure III-45

Chapitre IV

TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE DEVELOPPEE

1. Cinématique de la Turbulence Bidimensionnelle Homogène Isotrope

1-1. Equations du Mouvement dans l'Espace de Fourier

1-2. Equations de l'Energie dans l'Espace de Fourier

1-3. Turbulence Homogène Isotrope

1-3-a. Corrélations dans l'espace physique et l'espace de Fourier

1-3-b. Symétries, dépendance scalaire

1-3-c. Corrélations, spectres et bispectres monodimensionnels

2. Dynamique de la Turbulence Bidimensionnelle Homogène Isotrope

2-1. Enstrophie

2-2. Turbulence Bidimensionnelle Entretienue

3. Résultats expérimentaux

3-1. Objectifs

3-2. Création de l'Ecoulement Turbulent

3-3. Caractérisation de l'Ecoulement à fort R_h dans le cas de la paroi circulaire

3-3-a. Comportement temporel

3-3-b. Profils de vitesses moyennes

3-3-c. Spectres monodimensionnels

3-3-d. Estimation directe des transferts à partir des corrélations

triples

Nous présentons maintenant des résultats obtenus avec le dispositif expérimental décrit au chapitre III dans la configuration avec paroi circulaire et dans les régimes où l'inertie joue un rôle prépondérant. Le comportement turbulent de l'écoulement, dans cette configuration, peut être étudié à partir des théories phénoménologiques de la turbulence bidimensionnelle. Avant de présenter nos résultats expérimentaux, nous avons essayé de présenter, de la façon la plus condensée possible, les outils standards de la cinématique de la turbulence homogène isotrope. Nous continuons ensuite avec un rappel des résultats des théories phénoménologiques sur la dynamique de la turbulence bidimensionnelle. Nous utilisons enfin les outils du paragraphe 1 pour montrer que nos mesures expérimentales peuvent être interprétées dans le cadre des théories décrites au paragraphe 2.

1. Cinématique de la turbulence bidimensionnelle homogène isotrope

La cinématique de la turbulence homogène isotrope tridimensionnelle a été décrite explicitement dans des ouvrages devenus classiques: Batchelor (1953), Hinze (1959) ou Monin et Yaglom (1971). En dimension 2, la démarche reste la même mais les relations entre les grandeurs cinématiques diffèrent du cas tridimensionnel. Des simplifications apparaissent également; par exemple nous n'avons pas à considérer l'hélicité qui n'existe pas en dimension 2. Ce paragraphe servira donc à rappeler les lois cinématiques de la turbulence bidimensionnelle homogène et isotrope et à introduire les notations utilisées tout au long de ce chapitre. Nous insisterons également sur les relations existant entre les quantités calculées à partir des mesures expérimentales et les fonctions intervenant dans les présentations théoriques.

1-1. Equations du mouvement dans l'espace de Fourier

Nous utilisons les équations du mouvement écrites sous forme adimensionnelle:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \Delta \mathbf{u} / Re - \mathbf{u} / Rh + \mathbf{F} \quad (\text{IV-1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

Nous rappelons les propriétés des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un fluide incompressible dans l'espace spectral.

La transformée de Fourier du champ de vitesse \mathbf{u} est:

$$\text{TF}[\mathbf{u}] = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\text{t et espace}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (\text{IV-3})$$

On calcule la transformée de chaque terme des équations:

$$\text{T.F.} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t}$$

$$\text{T.F.} \left[\frac{\Delta \mathbf{u}}{\text{Re}} \right] = -k^2 \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\text{Re}}$$

$$\text{T.F.} [\nabla p] = i\mathbf{k} p$$

$$\text{T.F.} [\{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i] = \text{T.F.} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \text{T.F.} \left[\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right] = -ik_j \text{T.F.} [u_i u_j]$$

(On utilise la convention des indices répétés.)

De plus le théorème de convolution permet d'écrire:

$$\text{TF}[u_i u_j] = (\hat{u}_i \otimes \hat{u}_j)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}$$

L'équation de continuité dans l'espace spectral s'écrit:

$$\text{TF}[\nabla \cdot \mathbf{u}] = i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{IV-4})$$

En projetant les équations ainsi obtenues sur un plan π orthogonal à \mathbf{k} on élimine le terme de pression. Tous les autres termes exceptés les termes inertiels sont parallèles à π . La projection d'un vecteur \mathbf{a} sur un plan orthogonal à \mathbf{k} s'écrit:

$$\{\text{proj}[\mathbf{a}]\}_i = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) a_j$$

alors

$$\{\text{proj}[\text{TF}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]]\}_i = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) (-ik_j) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}$$

Les équations de notre modèle bidimensionnel, dans l'espace de Fourier, se ramène donc à:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Rh}} \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = -ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \quad (\text{IV-5})$$

avec $P_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$

1-2. Equation de l'Energie dans l'Espace de Fourier

Elle s'obtient en écrivant les équations précédentes pour les nombres d'onde \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$:

$$(\partial/\partial t + k^2/Re + 1/Rh) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = -ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \quad (a)$$

$$(\partial/\partial t + k^2/Re + 1/Rh) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) = ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=-\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \quad (b)$$

On multiplie les 2 membres de (a) par $\hat{u}_i(-\mathbf{k}, t)$ et ceux de (b) par $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$ puis on somme; on obtient l'égalité:

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t + 2k^2/Re + 2/Rh) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) = \\ & - ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \\ & + ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \\ & = ik_j P_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) - \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \end{aligned}$$

Le symbole "*" indique le complexe conjugué.

L'hypothèse d'incompressibilité permet de simplifier le deuxième terme:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2k^2}{Re} + \frac{2}{Rh} \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) = \\ & ik_j \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) - \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \quad (IV-6) \end{aligned}$$

on effectue alors une moyenne d'ensemble (notée $\langle \rangle$) et on introduit :

-le tenseur energie spectrale bi-dimensionnel

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{k}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k}, t) \rangle \quad (IV-7)$$

-le bispectre bi-dimensionnel

$$B_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}'', t) \hat{u}_j(\mathbf{k}', t) \hat{u}_m(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (IV-8)$$

avec $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0$

on identifie,

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) \rangle = \Phi_{ii}(\mathbf{k})$$

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k} + \mathbf{p}, t) \rangle = B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$$

$$\langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(-\mathbf{k} + \mathbf{p}, t) \rangle = B_{jii}^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$$

d'où

$$(\partial/\partial t + 2k^2/Re + 2/Rh) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -2k_j \int \Im m[B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})] d\mathbf{p} \quad (IV-9)$$

$\Im m$ est la partie imaginaire d'un complexe.

Posons:

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = -2k_j \Im m[B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})] \quad (IV-10)$$

L'équation de l'énergie dans l'espace spectral devient:

$$(\partial/\partial t + 2k^2/Re + 2/Rh) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \int T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (IV-11)$$

$T(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ représente le transfert d'énergie dans l'espace des vecteurs d'onde, depuis l'élément de volume $d\mathbf{p}$ vers l'élément $d\mathbf{k}$. (Batchelor 1953, p. 85)

Ce terme, qui fait intervenir des corrélations triples, correspond au terme quadratique dans les équations de Navier-Stokes. Il ne peut créer ou détruire de l'énergie. Il peut la déplacer d'un endroit à un autre dans l'espace physique ou d'un nombre d'onde à un autre dans l'espace spectral. S'il n'existait pas chaque mode évoluerait séparément et le spectre serait déterminé entièrement par les conditions initiales. Le terme inertiel redistribue l'énergie parmi les modes. Dans certaines circonstances, il peut produire un spectre à l'équilibre, caractéristique du problème et indépendant des conditions initiales.

1-3. Turbulence homogène isotrope

1-3-a. Corrélations dans l'espace physique et l'espace spectral

Si la turbulence est homogène on peut déduire le tenseur énergie spectrale du tenseur des corrélations dans l'espace physique par :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-2} \int R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{IV-12})$$

$$\text{où } R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \quad (\text{IV-13})$$

la relation est similaire pour les moments d'ordre 3 :

$$B_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t) = (2\pi)^{-4} \int R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (\text{IV-14})$$

$$\text{où } R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}', t) \rangle \quad (\text{IV-15})$$

1-3-b. Symétries. dépendance scalaire

Lorsque la turbulence est homogène et isotrope les fonctions de corrélation dans l'espace physique ou l'espace spectral prennent des formes plus simples. La symétrie introduite par l'hypothèse d'isotropie réduit le nombre de paramètres caractérisant les corrélations (Batchelor 1953). Dans l'espace spectral nous obtenons par exemple :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = P_{ij}(\mathbf{k}) \quad \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t) = P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{E(k, t)}{\pi k} \quad (\text{IV-16})$$

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \pi k \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{IV-17})$$

$E(k, t)$ est la densité d'énergie cinétique au nombre d'onde k . On dit plus couramment que $E(k, t)$ est le spectre d'énergie cinétique.

Le terme important dans l'équation (IV-9) faisant intervenir les corrélations triples est $B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$. On montre que l'isotropie permet d'écrire:

$$\sum_{i=1}^2 B_{jii}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t) = A_j(k, \mu_k, k') [(k'^2 - k k' \mu_k) k_j - (k^2 - k k' \mu_k) k'_j] \quad (\text{IV-18})$$

$$\mu_k = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k k'} \quad (\text{IV-19})$$

Les transferts détaillés $T(k, p)$ entre les nombres d'onde k et p peuvent alors se mettre sous la forme:

$$T(k,p) = \int_{|k|=k} \int_{|p|=p} T(k,-p) dk dp \quad (IV-20)$$

$$\text{d'où} \quad T(k,p) = i 2 \pi^2 k^2 p^2 \int_{-1}^1 A_j(k, \mu_k, p) (1 - \mu_k^2) d\mu_k \quad (IV-21)$$

1-3-c. Corrélations. Spectres et Bispectres Monodimensionnels

Les mesures qui sont faites usuellement ne permettent pas de calculer directement les quantités introduites dans le paragraphe précédent. En effet, pour des raisons pratiques, on n'effectue les mesures que dans une direction. Dans une soufflerie par exemple, on mesure les composantes du champ de vitesse en fonction du temps. Si les fluctuations de vitesse u sont petites devant la vitesse moyenne U , on identifie les fluctuations temporelles $u(t)$ aux fluctuations spatiales $u(x/U)$. Cette approximation est connue sous le nom d'hypothèse de Taylor. Elle permet d'accéder à la vitesse en des points situés sur un axe parallèle à l'écoulement moyen. Dans notre cuve nous ne disposons également que d'une ligne de mesure. Il convient alors de rattacher les résultats statistiques des expériences à la théorie.

En prenant l'axe Ox_1 parallèlement à la direction de mesure, on dispose des valeurs:

$$u_i(x_1, 0, t) \quad i=1,2$$

dont on peut uniquement calculer la transformée de Fourier monodimensionnelle:

$$\hat{u}_i(k_1, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u_i(x_1, 0, t) e^{-ik_1 x_1} dx_1 \quad (IV-22)$$

Les résultats concernant les corrélations doubles ont déjà été présentés à plusieurs reprises [Leith 1971, Mory 1984]. Ils permettent en particulier de calculer le spectre d'énergie $E(k,t)$ à partir de la mesure d'une seule composante de la vitesse. En effet, le tenseur des corrélations peut s'écrire:

$$R_{ij}(r, t) = g(r, t) \delta_{ij} + \frac{f(r, t) - g(r, t)}{r^2} r_i r_j \quad (IV-23)$$

avec $r = |r|$

f et g sont respectivement les fonctions de corrélations longitudinales et transverses:

$$f(r_1) = \langle u_1(x_1, 0, t) u_1(x_1 + r_1, 0, t) \rangle \quad (IV-24)$$

$$g(r_1) = \langle u_2(x_1, 0, t) u_2(x_1 + r_1, 0, t) \rangle \quad (IV-25)$$

La condition d'incompressibilité impose la relation suivante entre f et g :

$$g(r,t) = f(r,t) + r \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\text{IV-26})$$

Ceci montre que le tenseur des corrélations doubles est parfaitement défini par la corrélation d'une seule des composantes de la vitesse. Le spectre d'énergie peut alors se calculer par exemple par:

$$E(k) = \frac{k}{2} \int_0^{\infty} r \{f(r) + g(r)\} J_0(kr) dr = \frac{k^2}{2} \int_0^{\infty} r^2 f(r) J_1(kr) dr$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel de première espèce.

Les spectres d'énergie monodimensionnels:

$$E_1(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(r_1) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \quad (\text{IV-28})$$

$$E_2(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(r_1) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \quad (\text{IV-29})$$

sont plus faciles à calculer à partir des mesures; ils sont reliés directement au spectre d'énergie par:

$$E_1(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{p^2} E(p) dp \quad (\text{IV-30})$$

$$E_2(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{k^2}{p^2 \sqrt{p^2 - k^2}} E(p) dp \quad (\text{IV-31})$$

Les mesures permettent également d'obtenir les corrélations triples en trois points mono-dimensionnelles

$$U_{ijk}(r_1, 0, r_1', 0) = \langle u_i(x_1, 0, t) u_j(x_1 + r_1, 0, t) u_k(x_1 + r_1', 0, t) \rangle \quad (\text{IV-32})$$

auxquelles on associe les bispectres monodimensionnels:

$$B_{ijk}(k_1, k_1') = \int U_{ijk}(r_1, 0, r_1', 0) e^{-i(k_1 r_1 + k_1' r_1')} dr_1 dr_1' \quad (\text{IV-33})$$

Ils sont reliés aux bispectres bidimensionnels par:

$$B_{ijk}(k_1, k_1') = \int B_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') dk_2 dk_2' \quad (\text{IV-34})$$

On montre que la connaissance des bispectres monodimensionnels est insuffisante pour accéder aux transferts détaillés $T(k, p)$ [Yeh et col. 1973]. Elle ne donne qu'une information intégrale sur le bispectre bidimensionnel. La détermination des transferts détaillés nécessiterait de faire des mesures de la vitesse sur un plan complet, tâche difficile à faire expérimentalement.

Le transfert net d'énergie :

$$T(k) = \int_0^{\infty} T(k,p) dp \quad (IV-35)$$

depuis tous les autres nombres d'onde vers le nombre d'onde k , est obtenu à partir des corrélations triples en deux points dans l'Annexe 2. Les conditions d'isotropie font que le tenseur des corrélations triples en deux points s'exprime avec les trois fonctions:

$$k(r_1) = \langle u_1(x_1,0,t) u_1(x_1,0,t) u_1(x_1+r_1,0,t) \rangle \quad (IV-36)$$

$$h(r_1) = \langle u_2(x_1,0,t) u_2(x_1,0,t) u_1(x_1+r_1,0,t) \rangle \quad (IV-37)$$

$$q(r_1) = \langle u_2(x_1,0,t) u_1(x_1,0,t) u_2(x_1+r_1,0,t) \rangle \quad (IV-38)$$

Nous utilisons à nouveau l'hypothèse d'incompressibilité dans l'annexe I pour relier ces trois quantités. Le transfert net s'exprime alors directement à partir de l'une de ces trois fonctions de corrélation; on obtient par exemple:

$$T(k,t) = \pi k T(k,t) = \frac{k^2}{4} \int_0^{\infty} k(r) r [kr J_0(kr) - 2J_1(kr)] dr \quad (IV-39)$$

2. Dynamique de la Turbulence Bidimensionnelle Homogène Isotrope

2-1. Enstrophie

Pour décrire la dynamique de la turbulence tridimensionnelle, Kolmogorov avait introduit l'idée maintenant classique de cascade d'énergie; l'énergie cinétique apportée à l'échelle de l'écoulement moyen est transférée vers des échelles de plus en plus petites à un taux constant pour être finalement dissipée par la viscosité.

La dynamique d'un écoulement bidimensionnel diffère profondément de celle d'un écoulement tridimensionnel. En l'absence de viscosité l'équation du mouvement s'écrit:

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad \text{où } \frac{D}{Dt} \text{ est la dérivée particulaire}$$

Cela signifie qu'une particule fluide garde toujours la même vorticité. Toutes les grandeurs de la forme:

$$\iint_D f(\omega) dD$$

sont donc conservées par les termes non-linéaires, en plus de l'énergie totale. C'est le cas de l'enstrophie:

$$Z = \iint_D \omega^2 dD \quad (\text{IV-40})$$

De la même manière que l'on a introduit un spectre d'énergie, on définit un spectre d'enstrophie $Z(k)$. Il est relié au spectre d'énergie par:

$$Z(k) = k^2 E(k) \quad (\text{IV-41})$$

L'existence de ces nouveaux invariants rend la cascade d'énergie incompatible. En effet tout transfert d'énergie vers les grands nombres d'onde provoquerait une croissance de l'enstrophie. Fjörtoff (1953) a ainsi montré que tout transfert d'énergie vers les grands nombres d'onde était accompagné d'un transfert inverse d'énergie beaucoup plus important vers les petits nombres d'onde.

2-2. Turbulence bidimensionnelle entretenue

S'appuyant sur les résultats de Fjörtoff, Kraichnan (1967) prédit le comportement du spectre d'énergie d'une turbulence bidimensionnelle forcée au nombre d'onde d'injection k_i . Ce comportement est caractérisé par une double zone inertielle:

-Une partie correspond à une cascade d'énergie depuis le nombre d'onde d'injection vers les petits nombres d'onde.

-L'autre est associée à une cascade d'enstrophie vers les grands nombres d'onde.

Ces zones sont mutuellement exclusives; il n'y a pas de transferts d'énergie dans la cascade d'enstrophie et réciproquement. Un raisonnement à la Kolmogorov conduit aux lois:

$$k < k_i \quad E(k) = C \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (\text{IV-42})$$

$$k > k_i \quad E(k) = C' \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3} \quad (\text{IV-43})$$

où ε est le taux d'injection d'énergie et η est le taux d'injection d'enstrophie.

Le mécanisme associé à cette double cascade peut être perçu physiquement comme l'enroulement de tourbillons de même signe, phénomène donnant lieu à la fois à un étirement des lignes de tourbillon et à un grossissement de la structure.

Remarque: Lorsque le spectre d'énergie est en loi de puissance, les relations (IV-28) et (IV-29) montrent que les spectres monodimensionnels ont également la même loi de puissance. Avec une loi en $k^{-5/3}$ on obtient:

$$E_1(k) \approx C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{avec } C_1 = 0.267 C \quad (\text{IV-44})$$

$$E_2(k) \approx C_2 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{avec } C_2 = 0.446 C \quad (\text{IV-45})$$

3. Résultats expérimentaux

3-1. Objectifs

Nous désirons employer le réseau de tourbillons pour forcer un écoulement turbulent que l'on pourra considérer en première approximation comme homogène et isotrope. Les données expérimentales quantitatives du champ de vitesse sur la turbulence bidimensionnelle restent assez exceptionnelles; Kelley et Kintner (1978) ont effectué des mesures de potentiel électrique dans la magnétosphère terrestre et montrent l'existence d'une cascade inverse d'énergie en $k^{-5/3}$ et d'une cascade d'énergie en k^{-3} . Les écoulements à méso-échelle dans l'atmosphère possèdent également des spectres d'énergie en k^{-3} mais la zone de transferts inverses d'énergie n'est pas observée; d'autres phénomènes, effet β , frottement sur le sol, empêchent la cascade inverse de se développer. Au niveau du laboratoire il est difficile de caractériser simultanément les deux zones inertielles. Il faudrait disposer d'une gamme d'échelles très étendue. Les modèles numériques rencontrent également les mêmes difficultés puisqu'il faut simuler correctement à la fois les échelles de dissipation et les grandes échelles.

Ce travail expérimental est la suite de ce qu'avait fait Somméria (1985). Il obtenait la preuve de transferts inverses d'énergie dans un écoulement turbulent forcé par un réseau carré de tourbillons de signes alternés. Le mécanisme de base étant l'appariement de tourbillons de même signe. Un spectre avec une zone en $k^{-5/3}$ était mesuré sur une demi-décade. Ces résultats demandaient à être confirmés avec une géométrie différente. Notre dispositif actuel possède aussi un rapport plus grand entre l'échelle d'injection et la taille de la boîte, autorisant le développement d'une cascade inverse d'énergie. Au niveau mesure, une meilleure résolution spatiale permet de définir correctement les échelles supérieures ou égales à l'échelle d'injection. D'autre part la double rangée d'électrodes de mesure donne accès aux deux composantes de la vitesse alors que Somméria pouvait mesurer uniquement la composante transverse. Nous pourrions alors comparer les spectres longitudinal et transverse. Nous pourrions surtout calculer directement les transferts globaux à partir des corrélations triples grâce à la relation (IV-39).

3-2. Création de l'écoulement turbulent

Nous avons montré dans le chapitre précédent que les instabilités se développant sur un réseau hexagonal de tourbillons de signes alternés ne conduisaient pas à une turbulence développée. Nous pouvons perturber le réseau en imposant un forçage à une échelle différente de celle du réseau. Cela a été effectué en remplaçant la couronne hexagonale par une paroi circulaire. L'énergie est alors apportée au nombre d'onde k_i , caractéristique du réseau, et également au nombre d'onde k_b représentatif de l'échelle de la boîte. Le fait d'injecter de l'énergie à deux nombres d'onde est plutôt gênant vis à vis de la comparaison des résultats avec les lois phénoménologiques. Cependant il faut noter que même si l'énergie est apportée à un même taux aux deux échelles, le flux d'entrophie est beaucoup plus important au nombre d'onde k_i . Dans le cadre de la théorie classique de la turbulence bidimensionnelle, on peut donc penser que le spectre d'énergie entre k_i et k_b sera gouverné par la cascade inverse d'énergie provenant de k_i .

3-3. Caractérisation de l'écoulement à fort R_h dans le cas de la paroi circulaire

3-3-a. Comportement temporel

Une première indication sur la turbulence engendrée par l'écoulement forcé en géométrie circulaire est obtenue en regardant le comportement des fluctuations temporelles de vitesse en un point. On examine le signal de vitesse au centre de la cuve à différentes valeurs de R_h [Figure IV- 1.a, 2.a et 3.a]. Pour ces valeurs de R_h , la vitesse évolue de manière très erratique et n'a pas du tout la régularité du signal obtenu dans des conditions voisines avec la paroi hexagonale. La densité spectrale d'énergie de ce signal est continue montrant que toute la bande des basses fréquences est excitée [Figure IV- 1.b, 2.b et 3.b]. Une autre preuve de la désorganisation de l'écoulement est donnée par la fonction densité de probabilité qui se rapproche d'une Gaussienne [Figure IV-4]. Cette configuration expérimentale semble donc intéressante pour étudier une turbulence bidimensionnelle pleinement développée.

3-3-b. Profils de vitesses moyennes

Les profils de vitesses moyennes longitudinales et transverses font apparaître des fluctuations spatiales à grandes échelles [Figure IV- 5, 6 et 7: $U_1(x)$] ne se trouvant pas sur les profils obtenus à plus faibles R_h ou avec la paroi hexagonale. Cette vitesse moyenne n'est pas négligeable devant la valeur quadratique moyenne des fluctuations. Somméria (1985) estimait la vitesse moyenne faible mais la ligne de mesure de son dispositif ne lui permettait pas de faire une mesure directe de cette valeur. On note cependant que dans son cas, les visualisations montrent clairement que le réseau initial disparaît complètement une fois que les instabilités se sont déclenchées. Ici, la structure du réseau d'injection est toujours sous-jacente. C'est le signe de transferts énergétiques, depuis le nombre d'onde de forçage vers les autres nombres d'onde, beaucoup moins efficaces. Néanmoins, bien qu'au niveau de l'échelle d'injection l'écoulement soit inhomogène, l'écoulement vu d'une échelle supérieure se comporte de façon quasi homogène.

3-3-c. Spectres monodimensionnels

Nous avons indiqué la façon dont on obtenait les spectres monodimensionnels d'énergie $E_1(k)$ et $E_2(k)$ dans le paragraphe de rappels sur la cinématique de la turbulence bidimensionnelle homogène et isotrope. Nous calculons d'abord respectivement la fonction de corrélation longitudinale $f(r)$ et la fonction de corrélation transverse $g(r)$ et nous prenons ensuite les transformées de Fourier de ces deux fonctions.

Dans un premier temps, nous avons effectué ces calculs à partir de la vitesse effectivement mesurée. Les figures (IV- 5, 6 et 7 : $F(r)$) représentent ces fonctions pour différentes configurations expérimentales. Sur ces courbes on note la périodicité du réseau d'injection, qui continue à se faire ressentir fortement, et également une cohérence des grandes échelles. Les spectres déduits des fonctions de corrélation [Figures

IV -5, 6 et 7 : $E_1(k)$] montrent sans équivoque qu'une bonne partie de l'énergie reste concentrée à l'échelle d'injection; une autre partie est transférée vers les petits nombres d'onde. Ce transfert inverse très net a lieu de manière complètement différente du cas avec la paroi hexagonale. En effet dans le cas présent l'énergie semble être transférée de manière continue depuis l'échelle d'injection vers les grandes échelles. Ce que l'on observe ici ressemble en tout point au phénomène de cascade inverse d'énergie présenté au paragraphe sur la dynamique de la turbulence bidimensionnelle. Nous avons tracé sur chacun des spectres une droite de pente $-5/3$. Il est très clair que les spectres obtenus possèdent une zone de nombres d'onde, comprise entre le nombre d'onde d'injection et un nombre d'onde caractéristique de la taille de la boîte, avec une pente approximative en $-5/3$.

Les transferts d'énergie sont généralement associés aux quantités fluctuantes. Sur les figures (IV- 5, 6 et 7 : $f(r)$ et IV- 5, 6 et 7 : $e_1(k)$) nous avons représenté respectivement les fonctions de corrélation et les spectres construits avec la partie fluctuante des signaux. Les corrélations longitudinale et transverse ne font plus apparaître les oscillations caractérisant la périodicité de l'écoulement de base. L'aspect de ces courbes de corrélation rappelle clairement celui des fonctions de corrélation "classiques" obtenues en turbulence homogène isotrope. Le pic situé au nombre d'onde k_j a disparu des spectres. En comparant les figures 5 : $E_1(k)$ et 5 : $e_1(k)$, on voit par contre que la zone du spectre avec une pente en $k^{-5/3}$ est inchangée; elle se situe exactement au même niveau d'énergie. Aux petits nombres d'onde, le spectre est nettement plus faible que sur le spectre complet.

A partir de ces résultats expérimentaux, nous pouvons construire le scénario suivant: l'énergie est injectée à un taux constant aux nombres d'onde k_j dans le mode hexagonal; une partie de cette énergie est transférée vers les échelles plus grandes par un mécanisme de transfert turbulent faisant intervenir les fluctuations de vitesse. Ces transferts ne sont pas très efficaces et l'énergie injectée est également accumulée au nombre d'onde k_j où elle est dissipée par le frottement sur le fond. L'énergie transférée gagne des échelles de plus en plus grandes et elle entretient un écoulement moyen à l'échelle de la cuve. On comprend mieux pourquoi l'écoulement turbulent très peu homogène présente une partie de son spectre ayant une forte similarité avec la cascade inverse d'énergie proposée par Kraichnan. Seules participent aux transferts les quantités fluctuantes qui, elles, sont quasi homogènes isotropes. La pente du spectre en $k^{-5/3}$ est un argument quantitatif appuyant cette description. La zone inertielle ainsi décrite s'étend sur un peu moins d'une décade. Nous déduisons la constante de Kolmogorov intervenant dans la formule (IV-42) à partir des différents spectres. Le taux de transfert d'énergie dans la cascade est assez délicat à estimer. Comme Somméria (1985) nous supposons que l'énergie transférée équilibre celle dissipée par le frottement dû à la couche de Hartmann. Cela donne l'expression:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\langle V^2 \rangle}{t_h}$$

On peut estimer $\langle V^2 \rangle$ comme étant la valeur quadratique moyenne de la vitesse réelle ou uniquement des fluctuations de vitesse. Il semble que dans le premier cas on surestime le taux d'énergie allant vers les grandes échelles puisqu'on sait qu'une partie non négligeable de l'énergie injectée est dissipée au nombre d'onde k_j . Le tableau 1 rassemble les valeurs de la constante de Kolmogorov mesurées en fonction du paramètre Rh .

Table 1 : valeurs mesurées de la constante de Kolmogorov en fonction de Rh

	Rh	21.5	25.5	28.	31.
	C	2.68	2.75	2.75	2.96

Pour valider l'approche "turbulence bidimensionnelle" homogène isotrope que nous avons utilisée pour décrire ce type d'écoulement, nous avons comparé les fonctions de corrélation longitudinale $f(r)$ et transverse $g(r)$, avec la corrélation croisée $\langle uv \rangle(r)$ lorsqu'on enregistre simultanément les deux composantes du champ de vitesse. Nous savons en effet que le terme de corrélation croisée est nul pour une turbulence isotrope à cause des invariances par rotation et que les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ sont reliées par la formule (IV-26). Nous avons, bien sûr, construit les corrélations à partir des signaux de vitesses fluctuantes qui paraissent effectivement homogènes et isotropes. La figure (IV-8) montre effectivement que le niveau des corrélations croisées est toujours faible. La figure (IV-9) indique que les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ satisfont bien la relation de conservation.

3-3-d. Estimation directe des transferts à partir des corrélations triples

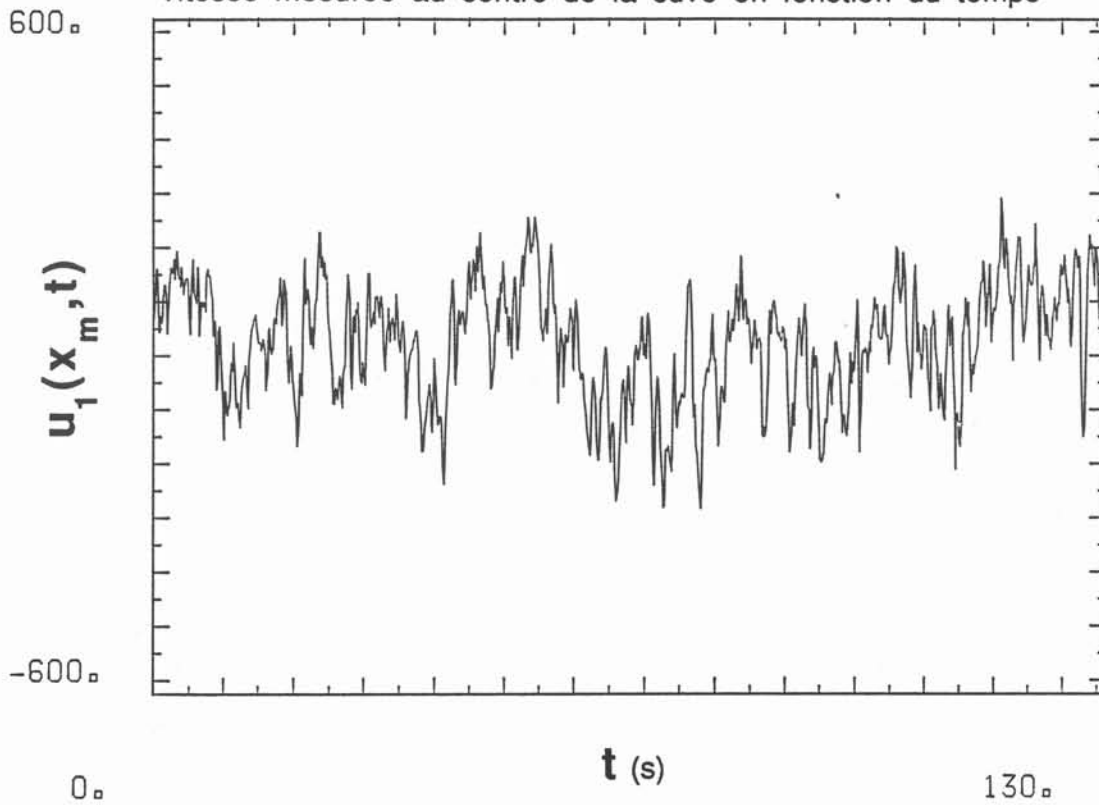
Les transferts d'énergie entre les différents nombres d'onde sont dus aux termes non linéaires dans l'équation de Navier-Stokes. Nous avons vu qu'il n'est pas possible de mesurer les transferts détaillés avec le système de mesure utilisé. Par contre on peut obtenir l'énergie reçue ou cédée globalement à chaque nombre d'onde.

Nous avons donc d'abord calculé les fonctions de corrélations triples en deux points $k(r), q(r)$ et $h(r)$. Elles sont représentées sur les figures (IV-10,11 et 12). Nous les avons adimensionnalisées par $\langle (u^2+v^2)/2 \rangle^{3/2}$. Les conditions de conservation pour les corrélations triples (A2-7) et (A2-8) ne sont pas très bien vérifiées. Une certaine imprécision vient du fait que nos échantillons ne sont pas assez longs. Nous avons en effet observé que la convergence des corrélations triples n'était qu'approximative. D'autre part il est naturel qu'au fur et à mesure que l'on augmente l'ordre des corrélations, la cohérence de l'écoulement à l'échelle du réseau et à l'échelle de la boîte se fasse ressentir.

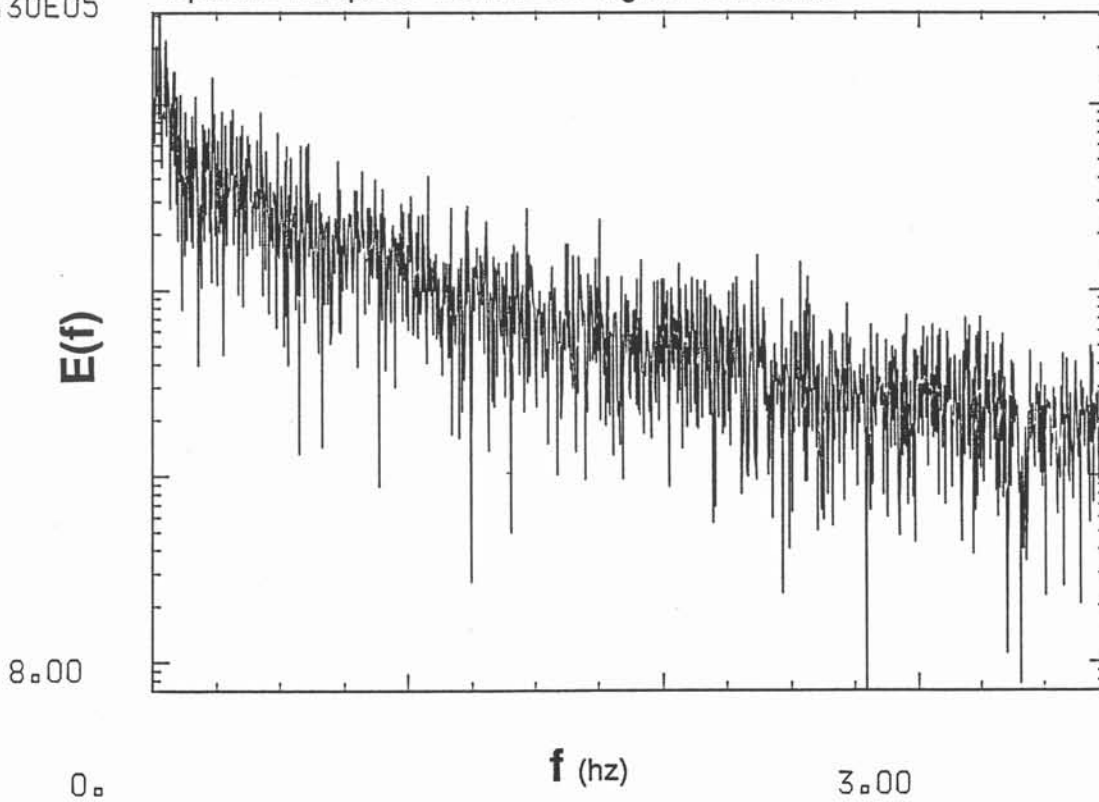
Nous avons ensuite calculé les transferts globaux $T(k)$ à partir de la corrélation $h(r)$ en utilisant une relation dérivée de, (IV-39), (A2-7) et de (A2-8). Une zone purement inertielle est caractérisée par des transferts globaux nuls; chaque nombre d'onde recevant autant d'énergie qu'il en cède. Sur la figure (IV-13) cela n'est pas vérifié. Dans notre cas le terme de frottement dissipe l'énergie à tous les nombres d'onde. Une partie de l'énergie venant des grands nombres est donc dissipée; la partie transférée vers les plus bas nombres d'onde diminue. Ce spectre des transferts inertiels n'a sûrement qu'une portée qualitative; il vérifie quand même bien le scénario que l'on a construit à partir de l'existence d'une cascade inverse d'énergie.

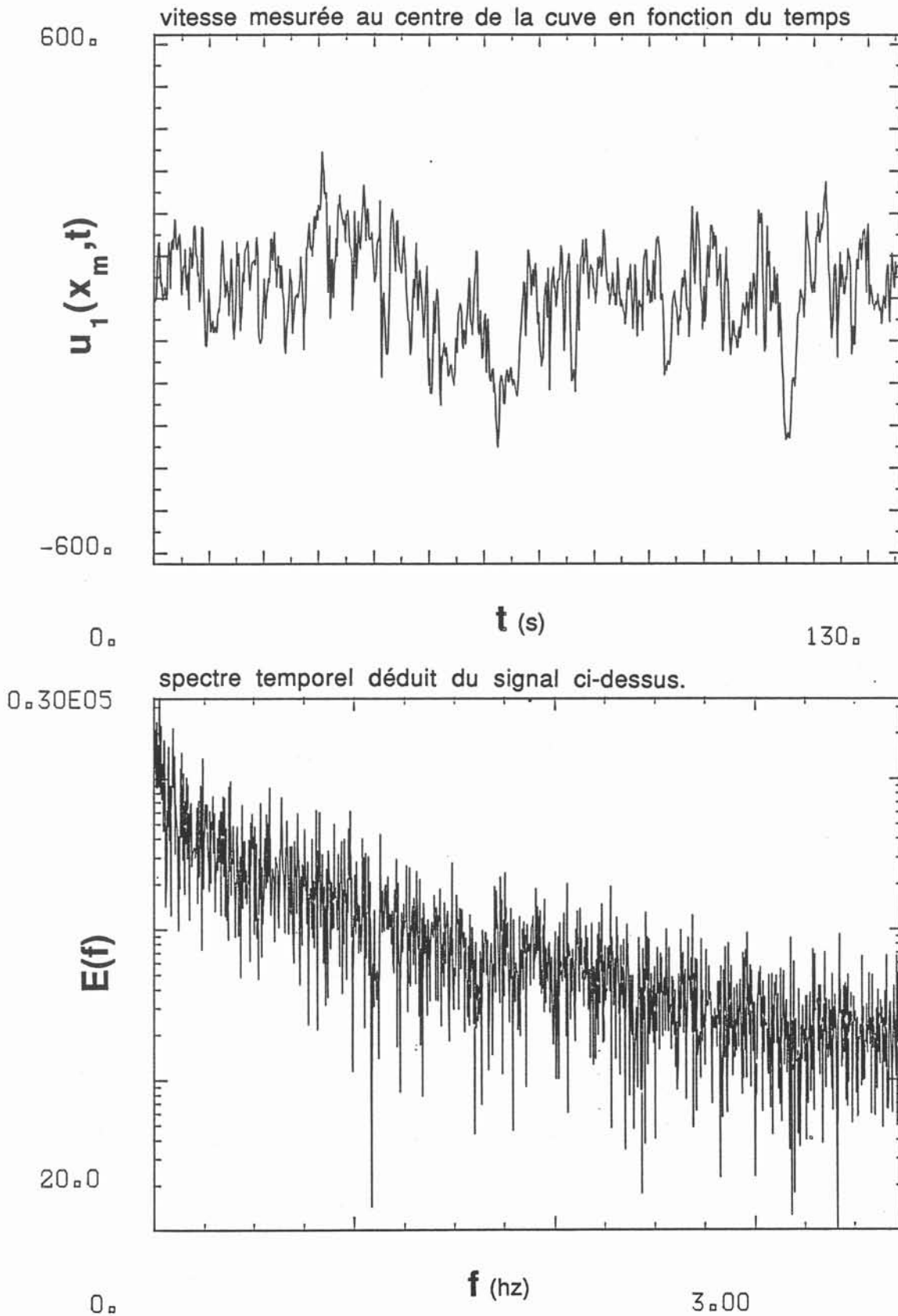
Rh=28.

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps



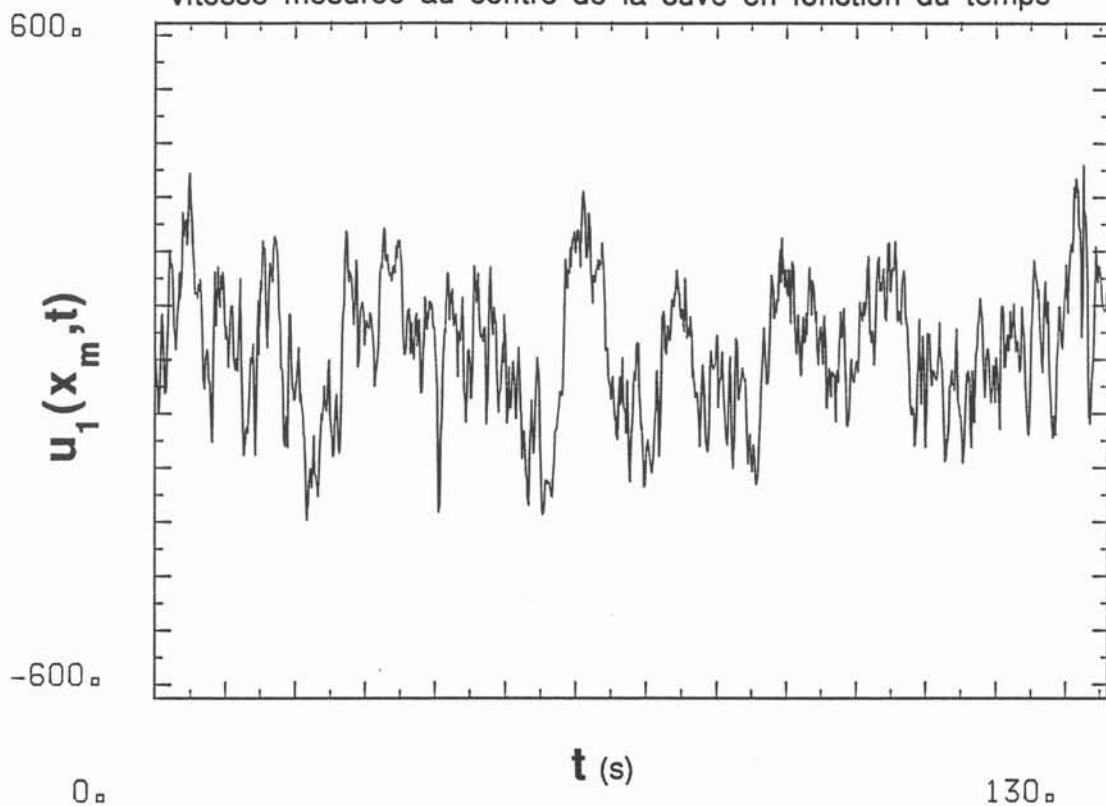
spectre temporel déduit du signal ci-dessus.



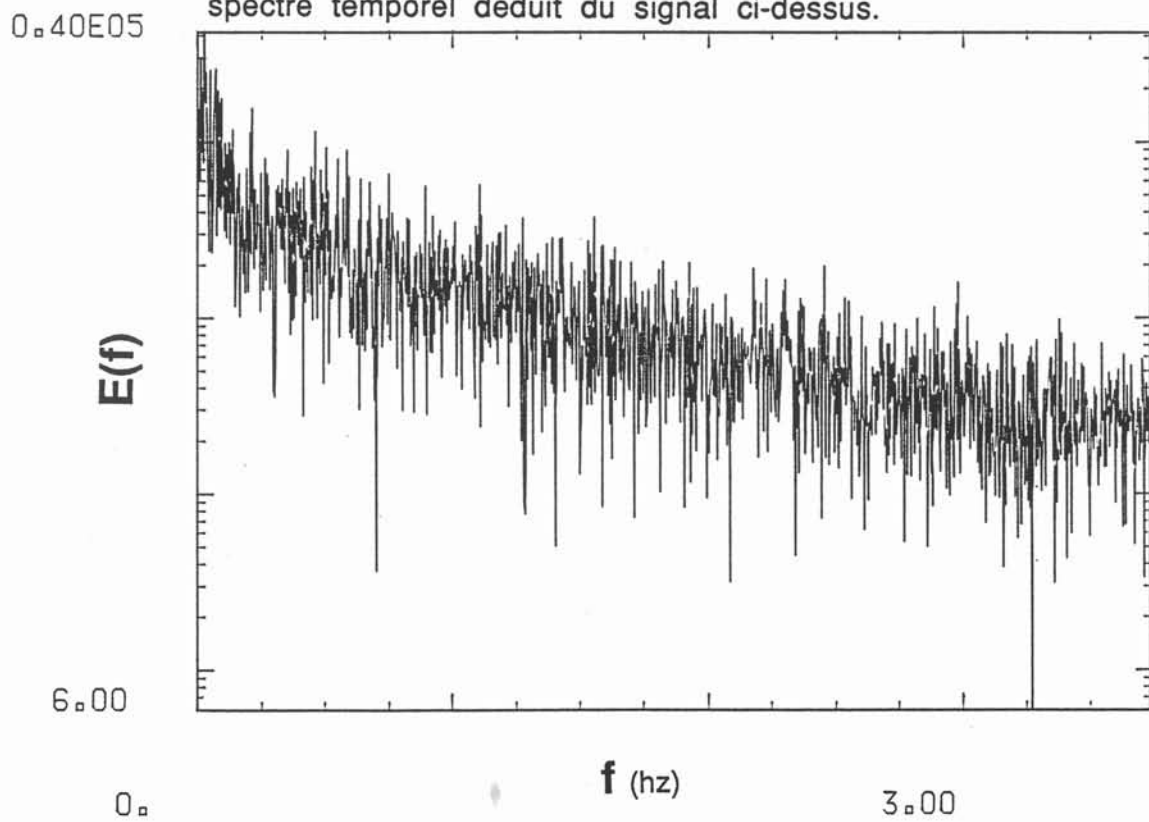
$Rh=29.6$ 

Rh=31.6

vitesse mesurée au centre de la cuve en fonction du temps



spectre temporel déduit du signal ci-dessus.



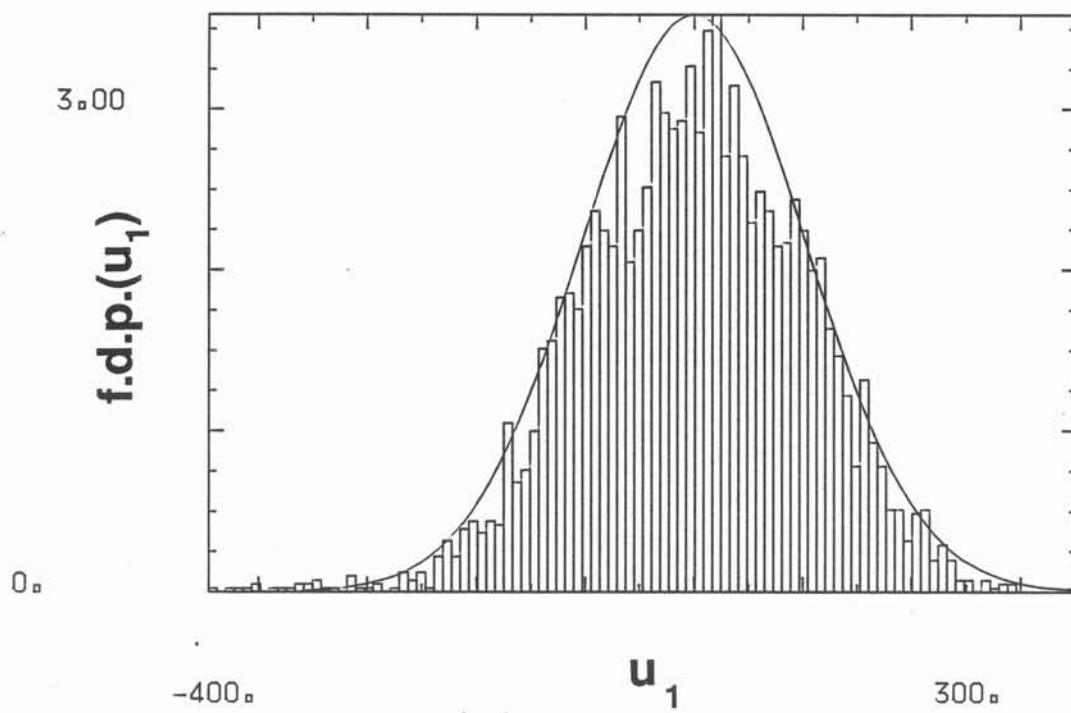
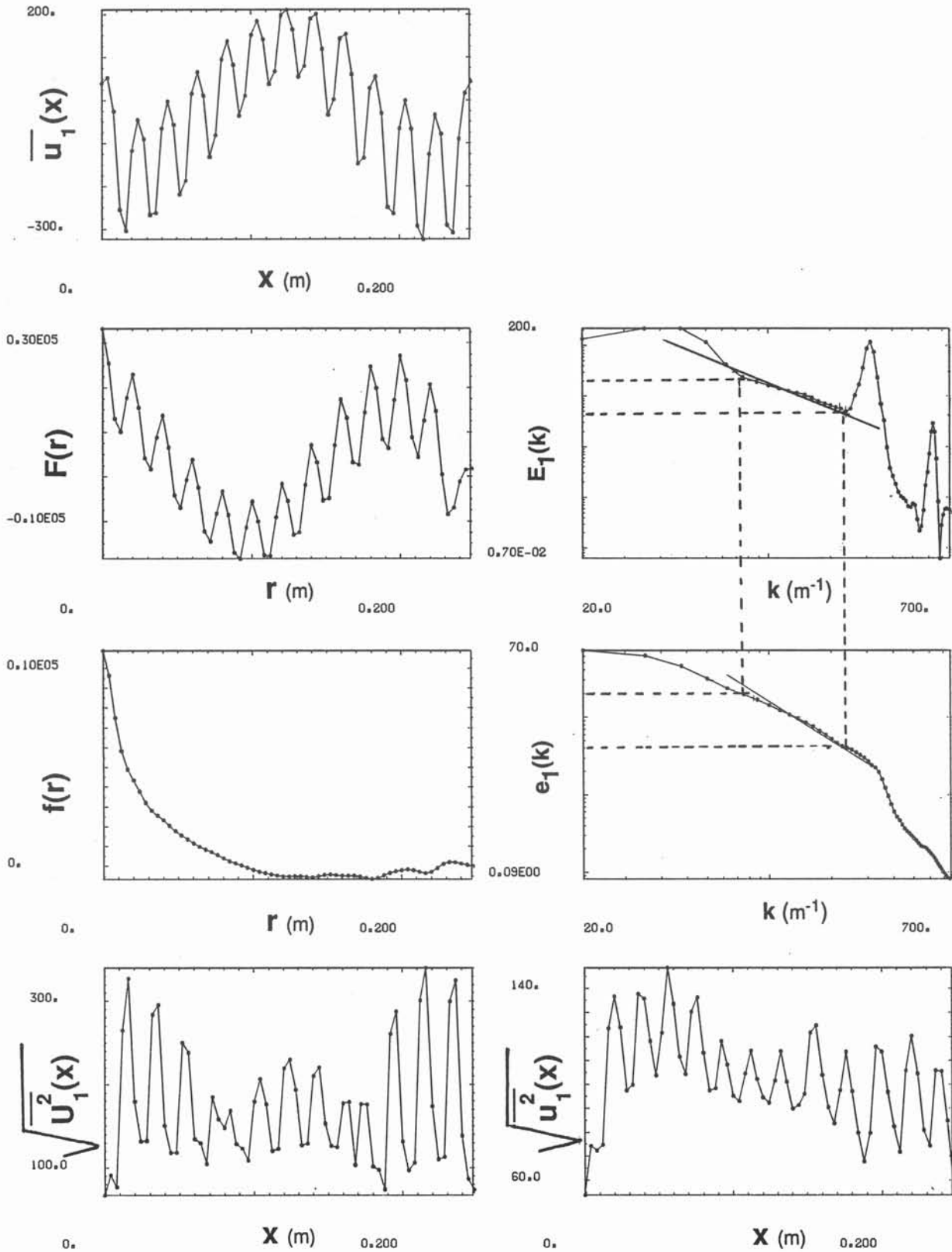


figure IV-4

Répartition quasi-gaussienne des fluctuations de vitesse au cours du temps

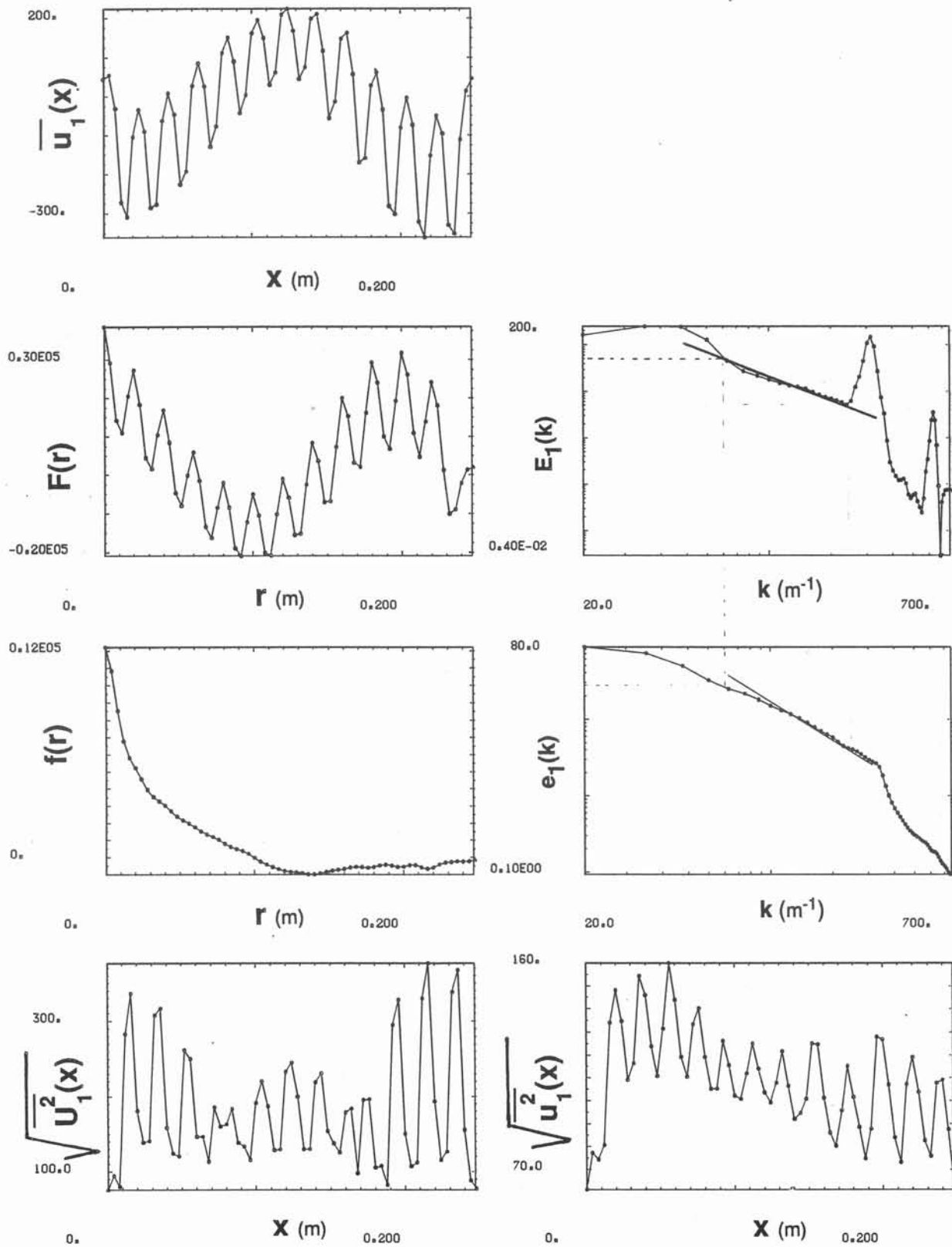
Rh=28.

figure IV-5



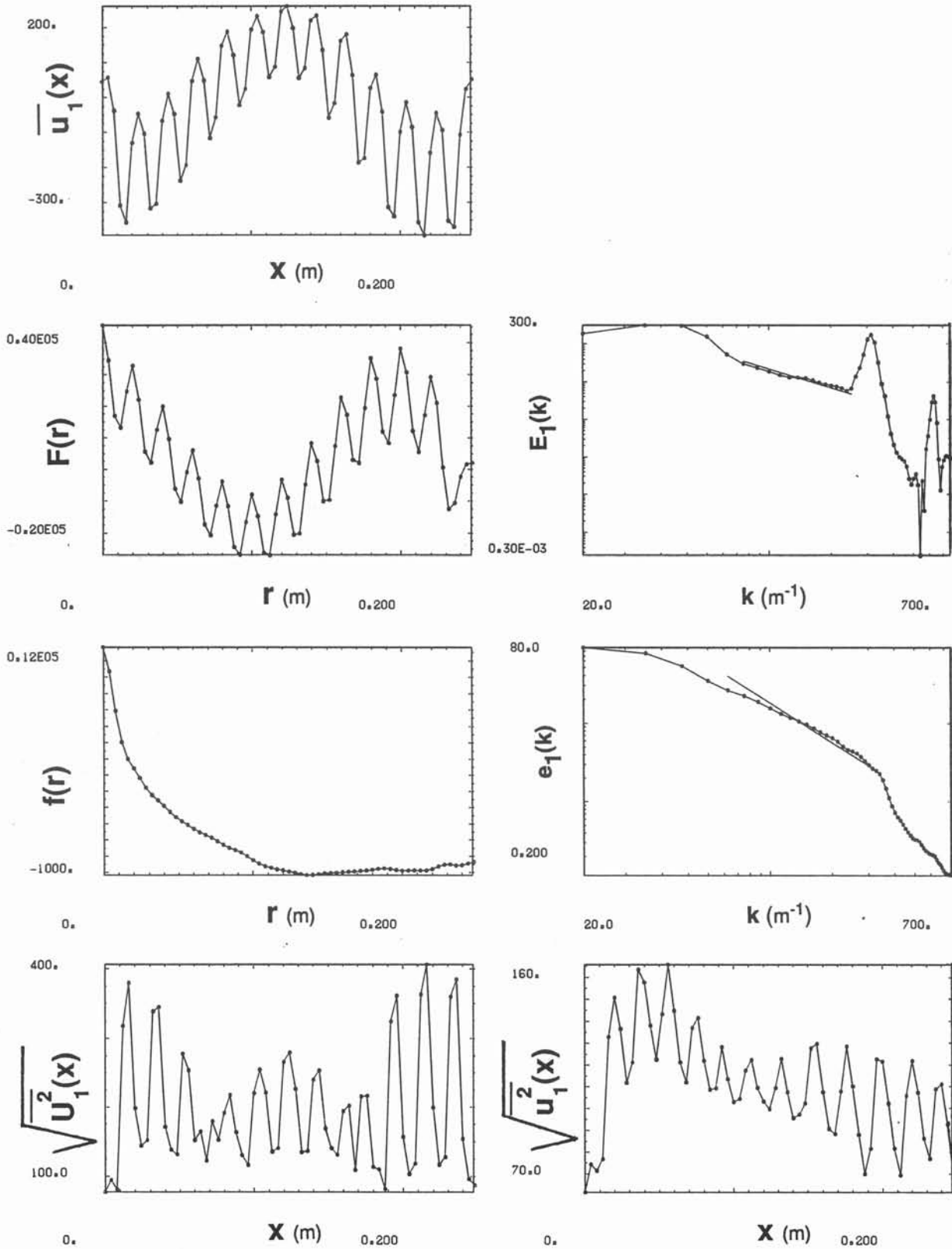
Rh=29.6

figure IV-6



Rh=31.6

figure IV-7



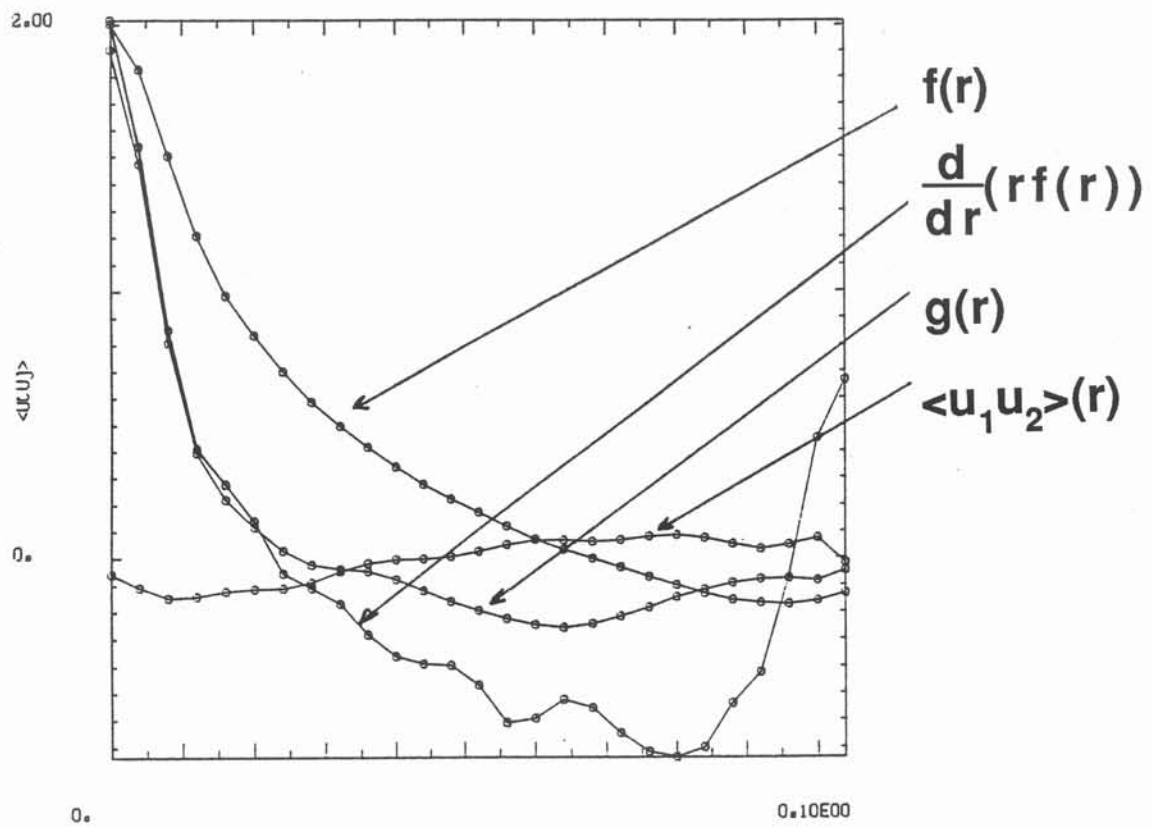
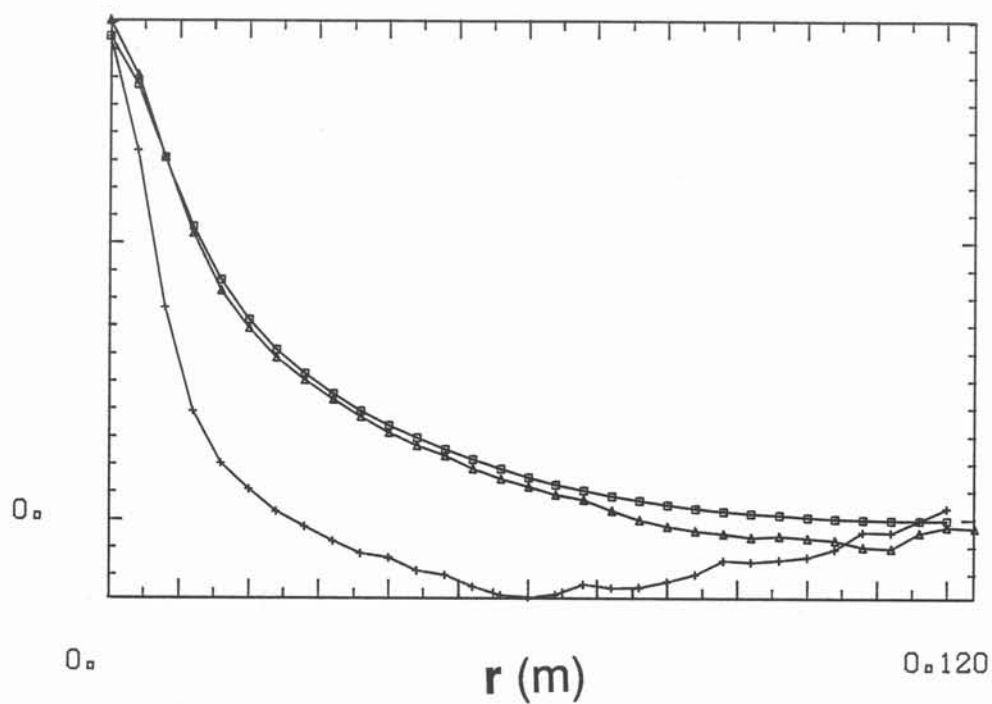


figure IV-8

comparaison des profils de corrélations doubles longitudinale $f(r)$, transverse $g(r)$ et croisée.



$$\begin{aligned} \Delta & f(r) \\ + & g(r) \\ \square & \frac{1}{r} \int_0^r g(x) dx \end{aligned}$$

figure IV-9

Comparaison des profils de corrélations doubles longitudinales $f(r)$, transverses $g(r)$.

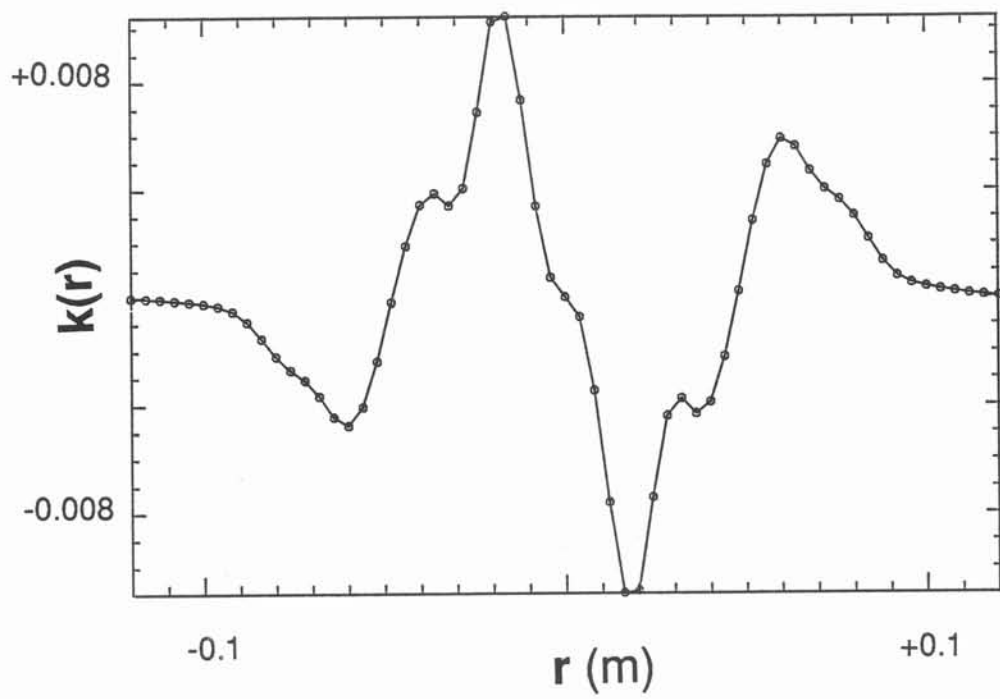


figure IV-10

Corrélation triple en 2 points $k(r) = \langle u(x,0,t)u(x,0,t)u(x+r,0,t) \rangle$ à $Rh=31.6$

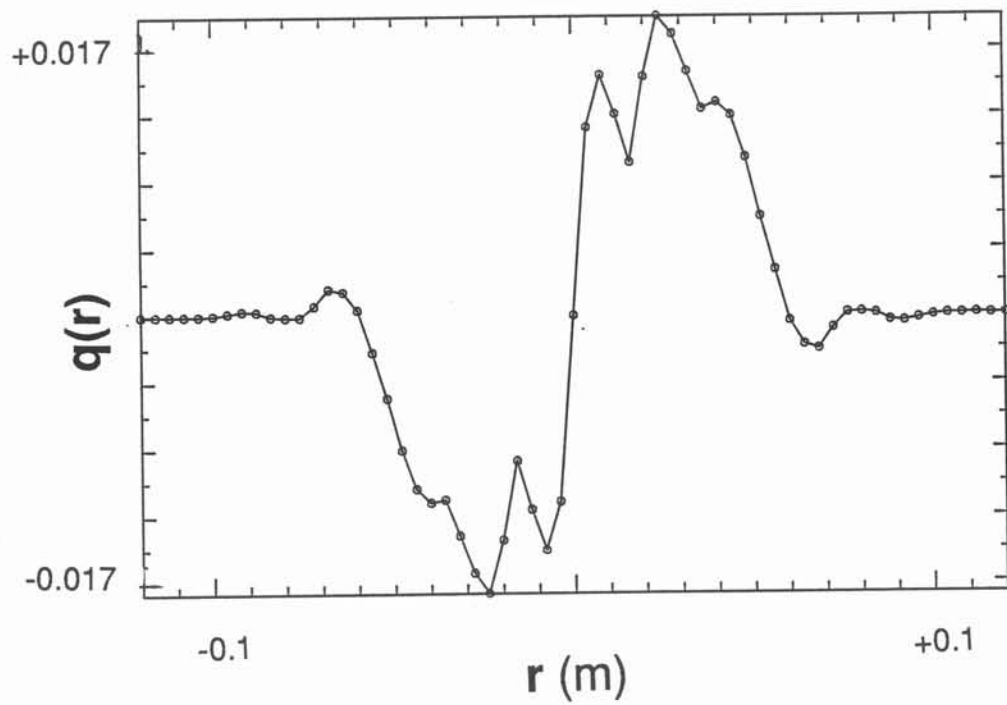


figure IV-11

Corrélation triple en 2 points $q(r) = \langle v(x,0,t)u(x,0,t)v(x+r,0,t) \rangle$ à $Rh=31.6$

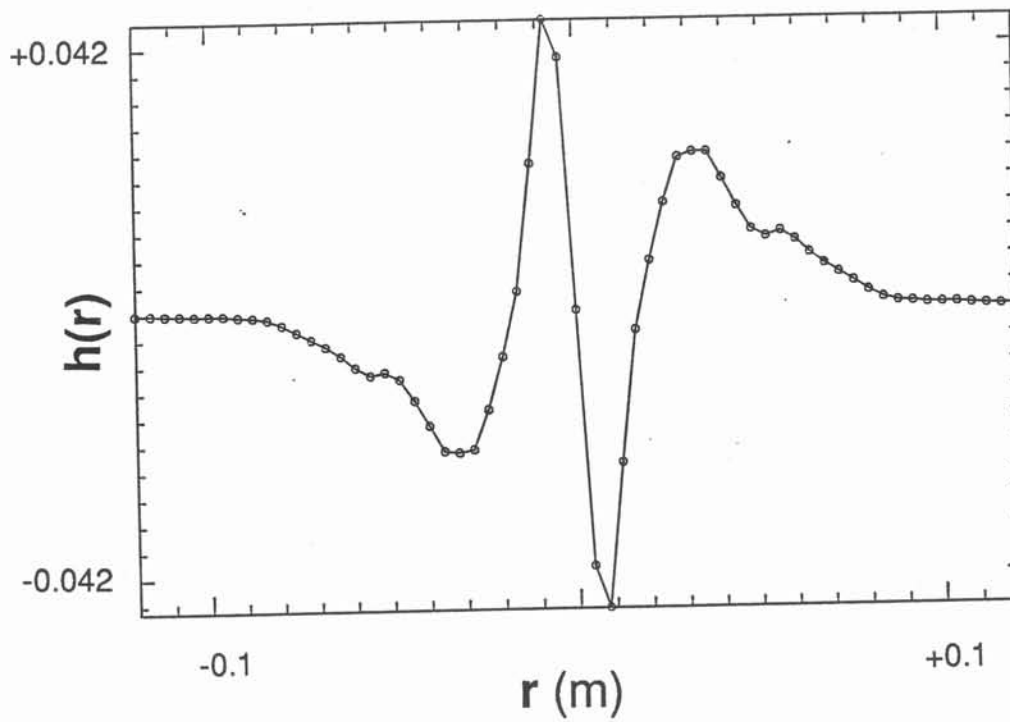


figure IV-12

Corrélation triple en 2 points $h(r) = \langle v(x_1, 0, t)v(x, 0, t)u(x+r, 0, t) \rangle$ à $Rh=31.6$

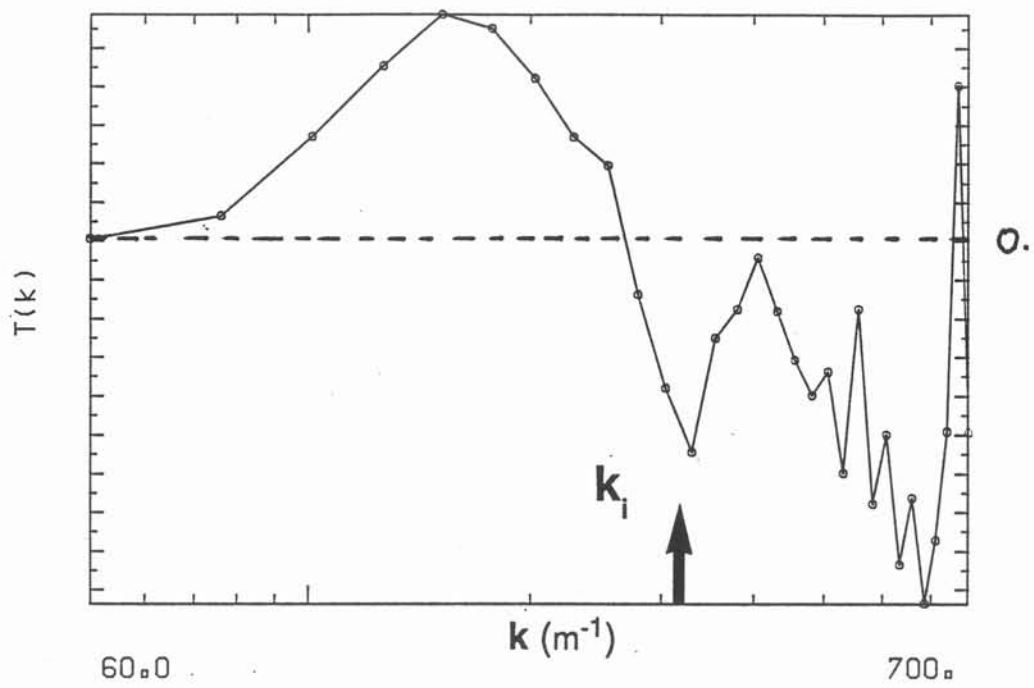


figure IV-13

Transfert global d'énergie $T(k)$ reçue ou cédée à chaque nombre d'onde à $Rh=31.6$

CONCLUSION

L'écoulement d'un fluide électro-conducteur, soumis à un champ magnétique uniforme et confiné entre des parois isolantes transverses au champ, possède une dynamique bidimensionnelle à l'extérieur des couches limites de Hartmann. Comme dans d'autres situations physiques, l'écoulement est alors le siège de forces volumiques inhibant la croissance des perturbations tridimensionnelles. Dans le cœur de l'écoulement, les équations du mouvement sont les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles auxquelles s'ajoute un terme de frottement linéaire.

Nous utilisons cette situation physique pour étudier expérimentalement diverses configurations d'écoulements bidimensionnels en évolution libre ou forcés électriquement.

Nous nous sommes d'abord intéressés à des structures vorticitaires faites de deux tourbillons tournant en sens contraires se déplaçant sous l'action mutuelle de leur propre champ de vitesse. De tels couples avaient été observés dans plusieurs expériences et simulations numériques. La durée de vie importante de ces entités posait le problème de leur stabilité. Il s'avère que la connaissance du champ de vitesse à l'intérieur de telles structures est un point essentiel pour étudier leur stabilité. Nous obtenons ces couples de vortex en envoyant une impulsion de courant électrique entre deux électrodes plongées dans le mercure. Un petit jet se forme et il évolue rapidement en un couple de tourbillons. Grâce à des mesures par visualisation précises et à un traitement numérique adéquat des champs de vitesse digitalisés, nous avons établi des cartes de vorticité et de fonction de courant à l'intérieur des tourbillons. Nous montrons que la vorticité et la fonction de courant sont fonctions l'une de l'autre. C'est une preuve de la stationnarité de ces structures. De plus la fonction déterminée expérimentalement caractérise la structure tourbillonnaire étudiée. Nous montrons qu'il existe toute une gamme de couples de tourbillons stationnaires différant par le facteur de dissymétrie. Les couples symétriques se propagent de façon rectiligne; lorsqu'un des tourbillons est plus fort que l'autre, il l'entraîne selon une trajectoire circulaire plus ou moins prononcée. Cette expérience a aussi permis, de vérifier la bidimensionnalité de l'écoulement, et de mesurer l'effet de frottement pour le comparer avec la valeur théorique.

Nous avons ensuite abordé le problème de la stabilité hydrodynamique d'un réseau périodique, à symétrie hexagonale, de tourbillons de signes alternés. Cet écoulement de base est obtenu en injectant un courant électrique constant à travers un réseau d'électrodes disposées sur le fond de la cuve à mercure et ayant la périodicité du réseau de tourbillons. Deux géométries de parois ont été utilisées; l'une est circulaire et l'autre est hexagonale. Nous avons accès à la vitesse en mesurant des différences de potentiel électrique le long d'une double rangée d'électrodes disposées sur la paroi perpendiculaire au champ magnétique. Des acquisitions simultanées en 64 points nous donnent une information temporelle et spatiale sur le champ de vitesse. Le paramètre de contrôle est le nombre sans dimension Rh qui mesure l'importance des effets d'inertie par rapport au frottement.

Lorsque Rh est petit, l'écoulement est stable et il est bien décrit par une distribution de vortex, centrés sur chacune des électrodes d'injection du courant, et

assurant la condition de circulation nulle à la paroi. Pour une valeur de Rh critique voisine de 1.40, le réseau périodique se déstabilise selon une bifurcation de Hopf. La vitesse fluctue périodiquement autour d'une valeur moyenne; la fréquence d'oscillation est la même dans toute la cuve. L'intensité des fluctuations est modulée avec une périodicité spatiale égale à celle du réseau de forçage. Nous interprétons ces résultats comme l'existence d'ondes progressives non linéaires modulées en amplitude par une fonction ayant la périodicité du réseau de base.

Si on augmente la valeur de Rh , l'écoulement devient beaucoup plus complexe avec des échelles de temps et d'espace nombreuses. Pour des Rh encore plus grands, l'écoulement s'organise à nouveau en un système d'ondes analogue à celui qui est apparu au moment de la déstabilisation. Cette organisation est due à une résonance entre les ondes de perturbations et le réseau spatialement périodique.

Au plus grands Rh que nous ayons obtenu en géométrie hexagonale, nous montrons qu'on obtient un régime où le phénomène de résonance joue le rôle principal.

Un régime turbulent est obtenu à grand Rh lorsqu'un forçage à grande échelle est superposé au forçage périodique. Cette situation est obtenue expérimentalement en prenant une paroi latérale circulaire. Un écoulement moyen à grandes échelles apparaît. Par contre les variations de vitesse ont un caractère aléatoire. La comparaison des fonctions de corrélation longitudinale, transverse et croisée et basées sur les fluctuations temporelles de vitesse, montre que les fluctuations sont quasi isotrope. Nous nous apercevons également que, pour une gamme de nombres d'onde k comprise entre les petits nombre d'onde et le nombre d'onde d'injection, l'énergie existe entièrement sous forme des fluctuations temporelles de vitesse. On déduit de ces différentes remarques le scénario suivant:

L'énergie est principalement apportée à l'écoulement au nombre d'onde k_i caractéristique du réseau de forçage. Elle est transférée vers les plus bas nombres d'onde par un mécanisme mettant en jeu les fluctuations de vitesse. Ces dernières sont essentiellement de nature isotrope. Les transferts d'énergie à ces échelles sont compatibles avec ceux modélisant la cascade inverse d'énergie. Dans cette expérience une partie de l'énergie transférée disparaît dans le puit d'énergie que constitue le frottement. Le reste alimente des échelles de plus en plus grandes et renforce l'écoulement à grandes échelles. Cet écoulement à bas nombre d'onde, qui perturbe le flot à l'échelle du forçage périodique, permet la construction d'un spectre continu. Nous remarquons tout de même que les transferts ne sont pas efficaces; une bonne partie de l'énergie reste concentrée autour du nombre d'onde k_i où un équilibre se fait avec la dissipation.

La qualité des transferts d'énergie est à comparer à celle obtenue par Somméria (1986) avec un réseau carré de tourbillons. Somméria montrait que les transferts inverses étaient associés à l'appariement des tourbillons de même signe. Il est facile de voir que le mécanisme d'appariement est plus facile à mettre en œuvre pour un réseau carré que pour un réseau hexagonal. Dans le réseau hexagonal, la distance entre le cœur des tourbillons de même signe est plus grande que dans le réseau carré [figure 1]. Il semble donc que l'entité à considérer dans ce cas soit le couple de tourbillons de signes opposés. On retrouve alors une analogie certaine entre le couple de tourbillons et le réseau hexagonal; la stabilité et la faculté de propagation du couple est à comparer avec la persistance du réseau hexagonal même longtemps après la première instabilité et avec la nature propagative des ondes instables. Dans ce même esprit, nous remarquerons aussi la ressemblance de l'allée tourbillonnaire simulée par Couder et Basdevant (1986) avec une partie de notre réseau hexagonal.

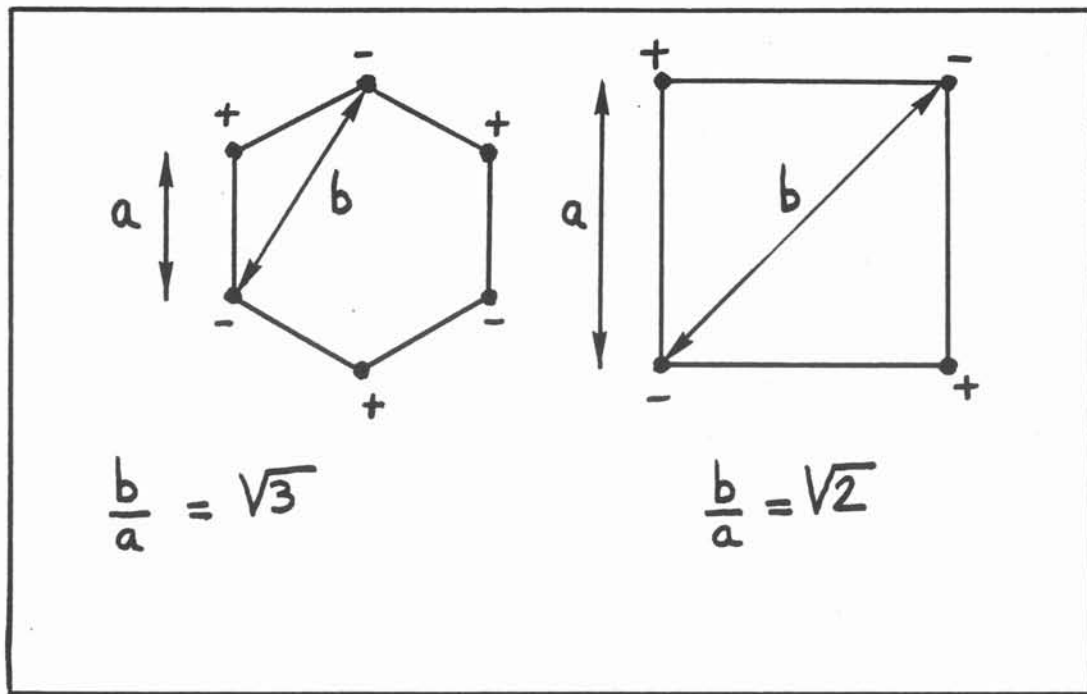


figure 1

Positions relatives des vortex de signes contraires dans un réseau à symétrie hexagonale ou carré

L'effet stabilisant du champ magnétique, vis à vis des perturbations tridimensionnelles, que l'on a mis en évidence au chapitre I, est également étudié pour ses applications dans des procédés métallurgiques. L'élaboration de mono-cristaux par la méthode Czochralski nécessite de réduire les fluctuations de température du bain de sel fondu au niveau du cristal. Dans ce cas l'application d'un champ magnétique permettrait de mieux contrôler les phénomènes de convection dans le bain. De même, on s'aperçoit que lorsqu'on solidifie une plaque métallique sous champ magnétique intense, on supprime les mouvements de convection verticaux; le refroidissement est alors purement diffusif et les cristaux ont une structures allongée selon le champ magnétique. Dans ces applications, des problèmes liés à l'inhomogénéité du champ magnétique ou de l'épaisseur de la couche fluide peuvent apparaître.

Les écoulements MHD que nous avons étudiés et les écoulements géophysiques ont des caractéristiques communes. Dans les deux cas, les écoulements sont contraints à rester bidimensionnels par une force de volume anisotrope: force de Laplace dans l'expérience MHD, force de Coriolis et stratification dans la situation géophysique. Dans

bidimensionnelle. Les deux modèles comportent un terme de frottement qui est ajouté aux équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. L'importance relative de ce frottement par rapport au terme d'inertie est évalué dans les deux situations:

	expérience MHD	écoulement géophysique
L(mètre)	10^{-1}	10^6
U(mètre/sec.)	10^{-1}	10
$t_{\text{frottement}}$ (seconde)	10	10^6
$\frac{L}{U}$	10^{-1}	10^{-1}
$\frac{t_{\text{frottement}}}{\frac{L}{U}}$		

Les deux types d'écoulements sont donc en similitude pour le frottement. De plus, le nombre de Reynolds est assez grand dans les deux problèmes et l'effet de la viscosité peut être négligé par rapport au frottement lorsqu'on s'intéresse aux grandes échelles. On s'attend donc à ce que le comportement des deux écoulements soit identique, du moins lorsqu'on les laisse évoluer librement.

La différence entre notre expérience et un écoulement géophysique vient du terme de forçage. Les écoulements atmosphériques à grandes échelles sont forcés par le mécanisme d'instabilités baroclines qui ont une nature aléatoire et elles sont décorélées du champ de vitesse. Dans notre modèle expérimental, la force est spatialement périodique et permanente; un écoulement moyen existe nécessairement à l'échelle du forçage. La comparaison de nos spectres d'énergie spatiaux $e(k)$ en régime turbulent, avec ceux obtenus par Lilly (1973) montre cependant que les transferts d'énergie sont très voisins. La dissipation de l'énergie par le frottement provoque un éloignement sensible de la forme du spectre avec une loi en $k^{-5/3}$ aux grandes échelles.

Au chapitre III, nous avons mis en évidence des propriétés tout à fait originale d'un écoulement forcé de manière spatialement périodique. L'émergence d'ondes progressives modulées en amplitude et orientées par le réseau de forçage donne à penser que l'écoulement d'apparence complexe peut, en fait, être décrit dans son ensemble par des équations plus simples que les équations de Navier-Stokes. Un système d'équations ne faisant intervenir que les amplitudes des trois ondes instables et la force spatialement périodique, pourraient avoir un comportement chaotique et rendre compte du phénomène de résonance. Une description par les formes normales permettrait de mieux comprendre la nature des interactions entre, les ondes engendrées par le mécanisme d'instabilité, leurs harmoniques et le réseau de forçage. Pour simplifier cette analyse théorique, on pourrait également considérer un cas monodimensionnel. L'écoulement de base serait alors constitué, par exemple, d'un anneau de tourbillons de signes alternés. Deux ondes, avec une longueur d'onde double de celle du réseau de forçage et se propageant en sens inverses, pourraient également résonner avec l'écoulement forcé.

Annexe 1

Compensation des spectres transverses tenant compte de la dimension du capteur de vitesse.

Le capteur de vitesse dans le dispositif expérimental est constitué de deux petites électrodes. La vitesse transverse est reliée au gradient de potentiel électrique longitudinal par la relation:

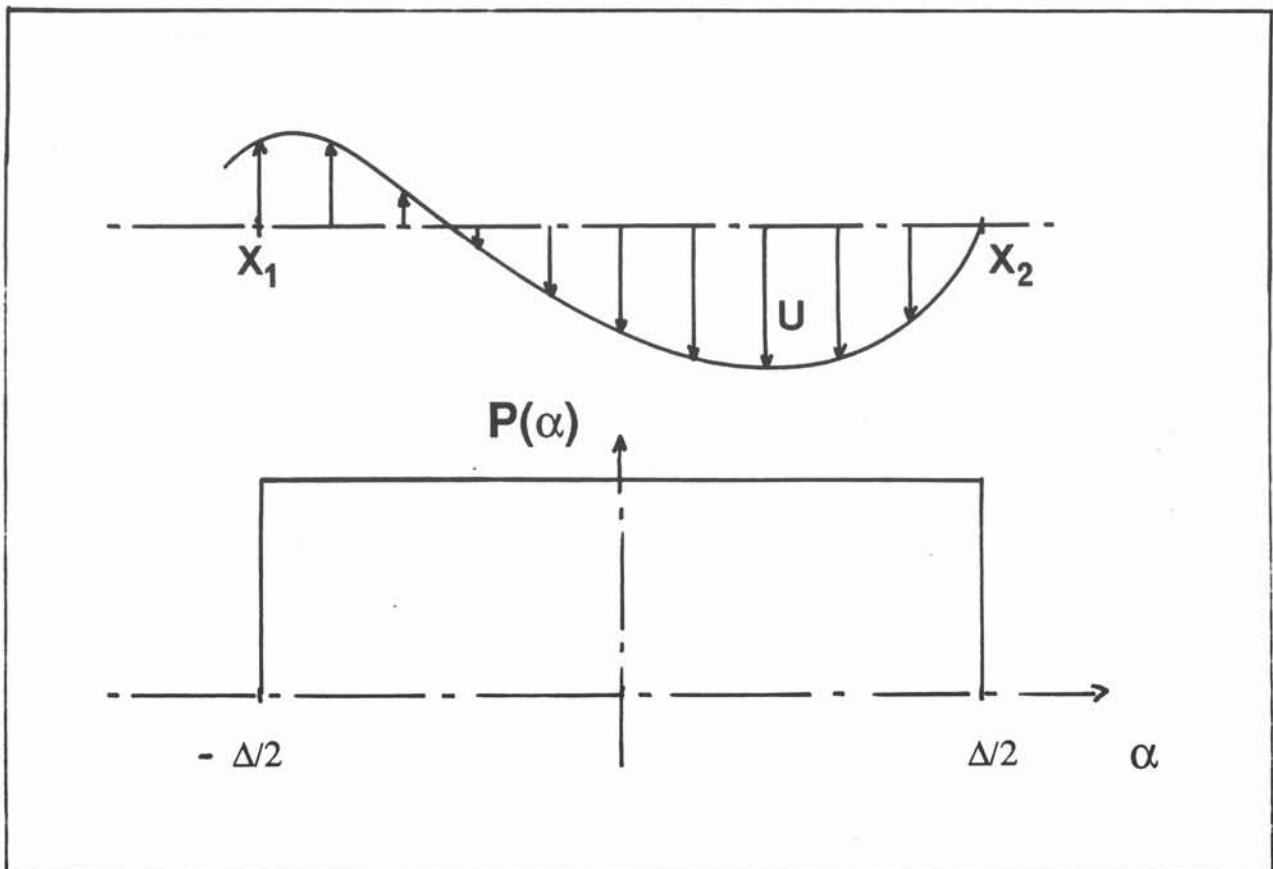
$$U_y = - \frac{1}{B_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (A1-1)$$

La mesure d'une différence de potentiel ϕ entre deux points constitue donc une mesure de la vitesse moyenne entre ces deux points:

$$V_y = - \frac{1}{B_0} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} U_y(x) dx \quad (A1-2)$$

On introduit la fenêtre rectangulaire $P(\alpha)$ telle que:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 0 && \text{pour } |\alpha| > \frac{\Delta}{2} \\ P(\alpha) &= 1 && \text{pour } |\alpha| < \frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$



La vitesse mesurée V_y s'exprime alors en fonction de la vitesse réelle comme:

$$V_y(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) U_y(x-\alpha) d\alpha \quad (\text{A1-3})$$

On prend la transformée de Fourier de cette égalité; le produit de convolution se transforme en produit simple:

$$\hat{V}_y = \frac{1}{\Delta} \hat{P}(k) \hat{U}_y(k) \quad (\text{A1-4})$$

où:

$$\hat{P}(k) = \Delta \frac{\sin k\frac{\Delta}{2}}{k\frac{\Delta}{2}} = \Delta \text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{2}\right) \quad (\text{A1-5})$$

On en déduit la relation entre le spectre transverse de vitesse réel $E_u(k)$ et le spectre transverse de vitesse mesuré $E_v(k)$:

$$E_u(k) = \frac{E_v(k)}{[\text{sinc}(k\frac{\Delta}{2})]^2} \quad (\text{A1-6})$$

Annexe 2

Relations entre les 3 différentes composantes du tenseur des corrélations triples en 2 points

Lorsque la turbulence est homogène et isotrope, les symétries imposent que le tenseur des corrélations triples en 2 points $(U_{ik,j})_{A,B}$ se mette sous la forme: (Hinze p. 157)

$$(U_{ik,j})_{A,B} = [k(r) - h(r) - 2q(r)]r^{-3} r_i r_k r_j + \delta_{ik} h(r) r^{-1} r_j + q(r) r^{-1} [\delta_{ij} r_k + \delta_{kj} r_i] \quad (A2-1)$$

avec $r = |r| = |AB|$

On identifie :

$$k(r) = U_{11,1}$$

$$h(r) = U_{22,1}$$

$$q(r) = U_{21,2}$$

L'hypothèse d'incompressibilité conduit à l'identité:

$$\partial / \partial r_j [(U_{ik,j})_{A,B}] = 0 \quad (\text{c'est une somme sur } j)$$

On remplace $(U_{ik,j})_{A,B}$ par son expression en fonction de k, h, q ; la dérivation conduit à l'égalité:

$$r_i r_k r^{-2} \{ r^{-1} [k(r) - h(r) - 2q(r)](d-1) + dk/dr - dh/dr \} + \delta_{ik} [dh/dr + (d-1)r^{-1}h(r) + 2r^{-1}q(r)] = 0 \quad \forall r_i, r_k \quad (A2-2)$$

d est la dimension de l'espace physique dans lequel on travaille.
La relation (A2-2) conduit aux deux équations:

$$dh/dr + (d-1)r^{-1}h(r) + 2r^{-1}q(r) = 0 \quad (A2-3)$$

$$r^{-1} [k(r) - h(r) - 2q(r)](d-1) + dk/dr - dh/dr = 0 \quad (A2-4)$$

En dimension 3, la solution de ce système est:

$$h(r) = -1/2 k(r) \quad (\text{A2-5})$$

$$q(r) = -1/2 r^{-1} d(h(r)r^2)/dr = 1/4 r^{-1} d(k(r)r^2)/dr \quad (\text{A2-6})$$

La solution dans un espace de dimension 2 est:

$$h(r) = -k(r) \quad (\text{A2-7})$$

$$q(r) = -1/2 [rdh(r)/dr + h(r)] = 1/2 [rdk(r)/dr + k(r)] \quad (\text{A2-8})$$

Annexe 3

Transfert global d'énergie en dimension 2

Dans cette annexe nous indiquons comment accéder directement au transfert global d'énergie cinétique, connaissant les fonctions de corrélations triples en 2 points.

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \quad (A3-1)$$

où $T(k,t)$ représente le transfert d'énergie sur le nombre d'onde k . Il est calculé en intégrant $T(k,t)$ sur une sphère de diamètre k :

$$T(k,t) = 2\pi k^2 T(k,t) \quad \text{en dimension } d=3 \quad (A3-2)$$

$$T(k,t) = \pi k T(k,t) \quad \text{en dimension } d=2 \quad (A3-3)$$

$T(k,t)$ est l'énergie globalement transférée par tous les vecteurs d'onde sur le vecteur d'onde k .

$$T(k,t) = \int_{\text{espace}} T(k,k') dk' \quad (A3-4)$$

$$T(k,k') = - \sum_{l=1}^d k_l \sum_{n=1}^d \text{Im}[B_{l,n,n}(k,-k')] \quad (A3-5)$$

Pour un champ de vitesse isotrope $B_{l,n,n}(k,-k')$ est imaginaire pur. On peut alors écrire:

$$T(k,k') = i \sum_{l=1}^d k_l \sum_{n=1}^d B_{l,n,n}(k,-k') \quad (A3-6)$$

Posons:

$$S_{ln,n}(k) = \int_{\text{tt espace}} B_{l,n,n}(k,-k') dk' \quad (A3-7)$$

Alors:

$$S_{ln,n}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\text{tt espace}} R_{l,n,n}(r,0) e^{-ik \cdot r} dr \quad (A3-8)$$

Le calcul du transfert global d'énergie ne fait intervenir que les corrélations triples en 2 points. En effet:

$$T(\mathbf{k}, t) = i(2\pi)^{-d} \sum_{l=1}^d k_l \int_{\Omega} \sum_{n=1}^d R_{l,n,n}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{A3-9})$$

On utilise l'expression l'expression du tenseur des corrélations triples en 2 points pour calculer:

$$\sum_{n=1}^d R_{l,n,n}(\mathbf{r}, 0) = \frac{r_l}{r} [k(r) + (d-1) q(r)] \quad (\text{A3-10})$$

Ce qui permet d'écrire:

$$T(\mathbf{k}, t) = i(2\pi)^{-d} \int_{\Omega} \frac{[k(r) + (d-1)q(r)]}{r} \sum_{l=1}^d k_l r_l e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{A3-11})$$

Espace de dimension 2:

On pose: $\theta = (\mathbf{k}, \mathbf{r})$

$$\sum_{l=1}^2 k_l r_l = k r \cos \theta$$

Ce qui permet d'écrire:

$$T(\mathbf{k}, t) = i(2\pi)^{-d} k \int_0^{\infty} [k(r) + q(r)] \int_0^{2\pi} \cos \theta e^{-ikr \cos \theta} d\theta r dr$$

Le Gradshteyn & Ryzhik donne:

$$\int_0^{\pi} e^{i\beta \cos x} \cos nx dx = i^n \pi J_n(\beta)$$

J_n étant la fonction de Bessel de première espèce. Alors:

$$T(\mathbf{k}, t) = -(2\pi)^{-1} k \int_0^{\infty} [k(r) + q(r)] J_1(kr) r dr \quad (\text{A3-12})$$

En utilisant la relation entre $k(r)$ et $q(r)$ de l'annexe 2, on peut exprimer $T(\mathbf{k}, t)$ uniquement en fonction des corrélations triples en 2 points longitudinales:

$$T(\mathbf{k}, t) = \pi k T(\mathbf{k}, t) = \frac{k^2}{4} \int_0^{\infty} k(r) r [kr J_0(kr) - 2J_1(kr)] dr \quad (\text{A3-13})$$

Références Bibliographiques

- ALEMANY, A. MOREAU, R. SULEM, P.L. & FRISH, U. 1979
Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence.
J. de Mécanique. **18**, 277.
- BATCHELOR, G. K. 1953
The Theory of Homogeneous Turbulence.
Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G. K. 1967
An introduction to fluid dynamics.
Cambridge University Press.
- BERGÉ, P. POMEAU, Y. & VIDAL, Ch. 1984
L'ordre dans le chaos.
Hermann
- BONDARENKO, M. Z. DOLZHANSKY, F.V. 1979
Atmospheric and Oceanic Physics **15**, 711.
- BRANOVER, H.H. GERSHON, P. 1979
Experimental investigation of the origin of residual disturbances in turbulent MHD flow after laminarization.
J. Fluid Mech. **94**, 629.
- CAPÉLAN, Ph. ALEMANY, A. 1985
Turbulence homogène MHD à faible nombre de Reynolds magnétique
J. de Mécanique Théorique et Appliquée. **4**, 175.
- COUDER, Y. 1984
Two-dimensional turbulence in a laboratory experiment.
J. Phys. Lett. **45**, 353.
- COUDER, Y. & BASDEVANT, C. 1986
Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows.
J. Fluid Mech. **173**, 225.
- ECKMANN, J. P. 1981
Roads to turbulence in dissipative dynamical systems.
Reviews of Modern Physics. **53**, 643.
- FJÖRTOFF, R. 1953
On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two dimensional non divergent flow.
Tellus. **5**, 225

FRISCH, U. & SULEM, P.L. 1984

Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence.
Phys. Fluids **27** (8), 1921. Erratum: *Phys. Fluids* 1985, **28**, 438.

FRISH, U. SHE, Z. & SULEM, P.L. 1987

Large scale flow driven by the anisotropic kinetic Alpha effect.
Physica D

GOTOH, K. & YAMADA, M. 1984

Instability of a Cellular Flow.
Journal of the Physical Society of Japan **53**, 3395.

GRADSHTEYN, I.S. & RYZHIK, I.M. 1980

Table of integrals, series, and products.
Academic Press

GÜCKENHEIMER, J. 1986

Strange attractors in fluids: another view.
Ann. Rev. Fluid Mech. **18**, 15.

HARTMANN, J. & LAZARUS, F. 1937

Experimental investigations in the flow of mercury in homogeneous magnetic field
Mat. Fys. Medd. **15**, 7.

HERRING, J. H. & McWILLIAMS, J. C. 1985

Comparison of direct numerical simulation of two-dimensional turbulence with two-point closure: the effect of intermittency.
J. Fluid Mech. **153**, 229.

HINZE, J.O. 1959

Turbulence
Mc Graw-Hill

HUNT, & SHERCLIFF, J. A. 1971

Magnetohydrodynamics at high Hartmann number.
Ann. Rev. Fluid Mech. **3**, 37.

JIMENEZ, J. 1983

A spanwise structure in the shear layer
J. Fluid Mech. **132**, 319.

KELLEY, M.C. & KINTNER, P.M. 1978

Evidence for two-dimensional inertial turbulence in a cosmic-scale low- β plasma
The Astrophysical Journal **220**, 339.

KITTEL, C. 1983

Physique de l'état solide.
Dunod

- KOLESNIKOV, Yu.B. & TSINOBER, A.B. 1974
An experimental study of Two-dimensional turbulence behind an array
Mekhanika Zhidkosti i Gasa **4**, 146.
- KRAICHNAN, R.H. 1967
Inertial range in two-dimensional turbulence.
Phys. Fluids **10**(8), 1417.
- KRAICHNAN, R.H. & MONTGOMERY, D. 1980
Two-dimensional turbulence
Reports on Progress in Physics **43**, 549.
- LANDFORD, O. E. 1982
The strange attractor theory of turbulence.
Ann. Rev. Fluid Mech. **14**, 347.
- LASHERAS, J.C. CHO, J.S. & MAXWORTHY, T. 1986
On the origin and evolution of streamwise vortical structures in a plane free shear layer.
J. Fluid Mech. **162**, 231.
- LEHNERT, B. 1955
The decay of magneto-turbulence in the presence of magnetic and Coriolis force
Quart. Appl. Math. **12**, 321.
- LEITH, C.E. 1971
J. Atmos. Sci. **28**, 145.
- LESLIE, D. C.
Developments in the theory of turbulence
Clarendon Press, Oxford.
- LIELAUSIS, O. 1975
Liquid Metal Magnetohydrodynamics
Atomic Energy Review. **13**, 507.
- MAXWORTHY, T. CAPERAN, Ph. & SPEDDING, G. R. 1985
Two-dimensional turbulence and vortex dynamics in a stratified fluid.
3rd International Symp. on Stratified Flows, CALTECH, Pasadena, California
- MOFFATT, H.K. 1967
On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field
J. Fluid Mech. **28**, 571.
- MOFFATT, H.K. 1978
Magnetic field generation in electrically conducting fluids.
Cambridge University Press
- MOREAU, R. 1968
On magnetohydrodynamic turbulence
Proc. of Symp. on turbulence of fluid and plasma, Polyt. Inst. of Brooklyn, 359.

MORY, M. 1984

Turbulence dans un fluide soumis à forte rotation.

Thèse -Grenoble

OTT, E. 1981

Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems.

Reviews of Modern Physics. **53**, 655.

RHINES, P. B. 1979

Geostrophic turbulence.

Ann. Rev. Fluid Mech. **11**, 401.

SCHUMANN, U. 1975

Numerical simulation of the transition from three- to two-dimensional turbulence under a uniform magnetic field.

J. Fluid Mech. **74**, 31.

SHERCLIFF, J. A. 1965

A textbook of magnetohydrodynamics.

Pergamon.

SIGGIA, E. D. & AREF, H. 1981

Point vortex simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence.

Phys. Fluids **24** (1), 171.

SIVASHINSKY, G. 1985

Weak Turbulence in periodic flows

Physica **17D**, 234.

SIVASHINSKY, G. & YAKHOT, V. 1985

Negative viscosity effects in large scale flows.

Phys. Fluids **28** (4), 1040.

SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1982

How, why and when MHD turbulence becomes two-dimensional.

J. Fluid Mech. **118**, 507.

SOMMERIA, J. 1983

Two-dimensional behaviour of MHD fully developed turbulence ($R_m \ll 1$)

J. de Mécanique Théorique et Appliquée, numéro spécial turbulence bidimensionnelle, 169.

SOMMERIA J. & VERRON J. 1984

An investigation of nonlinear interactions in a two-dimensional recirculating flow.

Phys. Fluids **27** (8), 1918.

SOMMERIA, J. 1985

Sur la turbulence bidimensionnelle; une approche par la magnétohydrodynamique.

Thèse d'état. Grenoble

SOMMERIA, J. 1986

Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box.
J. Fluid Mech. **170**, 139.

SUKORIANSKY, 1987

Local and integral characteristics of turbulence in the presence of a magnetic field and without it.

PHD thesis, Beer-Sheva

VOTSICH, A. D. & KOLESNIKOV, Yu. B. 1976

Spatial correlation and vorticity in two-dimensional homogeneous turbulence.
Magnitnaya Gidrodinamika ,378.

VOTSICH, A. D. & KOLESNIKOV, Yu. B. 1976

Transition from three- to two-dimensional turbulence in a magnetic field.
Magnitnaya Gidrodinamika ,378.

YEH, T.T. & VAN ATTA, C.W. 1973

Spectral transfer of scalar and velocity fields in heated-grid turbulence.
J. Fluid Mech. **58**, 233.

Table des matières

<u>Introduction</u>	p 5
 I. Écoulements bidimensionnels et Magnétohydrodynamique	
 <u>I-1. Étude bibliographique</u>	
I-1-1. Premier aperçu.....	p 11
I-1-2. Mécanismes.....	p 12
 <u>I-2. Réalisation d'un écoulement bidimensionnel</u>	
I-2-1. Création de l'écoulement.....	p 20
I-2-2. Interprétation des mesures de potentiel électrique.....	p 20
I-2-3. Forme adimensionnelle.....	p 21
 II. Structures Tourbillonnaires Bidimensionnelles Isolées	
Article à paraître au Journal of Fluid Mechanics.....	p 25
 III. Instabilités d'un Réseau de Tourbillons	
<u>III-1. Présentation</u>	p45
 <u>III-2. Dispositif Expérimental</u>	
III-2-1. Description géométrique de la cuve.....	p 47
III-2-2. Contrôle de la dynamique de l'écoulement.....	p 50
III-2-3. Mesure des gradients de potentiel.....	p 51
III-2-4. Visualisation.....	p 54
 <u>III-3. Déstabilisation du Réseau de Tourbillons</u>	
III-3-1. Présentation détaillée des divers régimes.....	p 55
III-3-2. Synthèse et Interprétation.....	p 77
III-3-3. Les modèles théoriques.....	p 88
<u>III-4. Régimes à Forts Rh</u>	p 89

IV. Turbulence Bidimensionnelle Développée

IV-1. Cinématique de la Turbulence Bidimensionnelle Homogène Isotrope

IV-1-1. Equations du mouvement dans l'espace de Fourier.....	p 107
IV-1-2. Equation de l'énergie dans l'espace de Fourier.....	p 108
IV-1-3. Turbulence homogène isotrope.....	p 110

IV-2. Dynamique de la Turbulence Bidimensionnelle Homogène Isotrope

IV-2-1. Enstrophie.....	p 115
IV-2-2. Turbulence bidimensionnelle entretenue.....	p 115

IV-3. Résultats Expérimentaux

IV-3-1. Objectifs.....	p 117
IV-3-2. Création de l'écoulement turbulent.....	p 117
IV-3-3. Caractérisation de l'écoulement à fort R_h dans le cas de la paroi circulaire.....	p 118

Conclusion.....	p 135
------------------------	--------------

Annexe1.....	p 139
---------------------	--------------

Compensation des spectres transverses tenant compte de la dimension du capteur de vitesse.

Annexe 2.....	p 141
----------------------	--------------

Relations entre les 3 différentes composantes du tenseur des corrélations triples en 2 points.

Annexe 3.....	p 143
----------------------	--------------

Transfert global d'énergie en dimension 2.

Références bibliographiques.....	p 145
---	--------------

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'article 15 Titre III de l'arrêté du 5 juillet 1984 relatif aux études doctorales

VU les rapports de présentation de Messieurs

- . B. CASTAING, Professeur
- . Y. COUDER, Professeur

Monsieur NGUYEN DUC Thanh Jean-Michel

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité "Mécanique".

Fait à Grenoble, le 24 mai 1988

Georges LESPINARD

Président

de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président,



Thèse de Docteur de l'Institut National Polytechnique de
Grenoble

Titre de l'ouvrage :

**INSTABILITE ET TURBULENCE DANS DES
ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS MHD**

Nom de l'auteur : NGUYEN DUC Jean-Michel

Etablissement : Institut National Polytechnique de
Grenoble.

RESUME

Nous créons des écoulements bidimensionnels à l'intérieur d'une couche de mercure mince, horizontale et soumise à un champ magnétique uniforme vertical. Le fluide est mis en mouvement en injectant des courants électriques.

Le premier type d'écoulements considéré est un couple de tourbillons de signes alternés. Nous l'étudions au moyen de visualisations. Elles révèlent la répartition spatiale du champ de vitesse. Nous calculons la vorticité et la fonction de courant par un traitement numérique du champ de vitesse digitalisé. Ces deux grandeurs nous permettent de caractériser les structures tourbillonnaires stationnaires rencontrées.

Nous nous intéressons ensuite à un réseau hexagonal de tourbillons forcé, et suivons la déstabilisation de ce réseau périodique. Nous montrons que même bien au-delà de la transition, l'écoulement déstabilisé est gouverné par les interactions d'ondes non linéaires qui sont apparues aux moments de la transition.

Lorsqu'on perturbe l'écoulement précédent à une échelle grande devant la période spatiale du réseau, un mouvement plus désorganisé apparaît. Nous montrons que la composante fluctuante de la vitesse est quasi homogène isotrope. Les fluctuations de la vitesse jouent le rôle actif dans les transferts inertiels d'énergie. On vérifie que ces transferts sont décrits par les lois phénoménologiques de la turbulence bidimensionnelle.

MOTS CLES

Turbulence ; Ecoulements bidimensionnels ; Tourbillon ;
Magnétohydrodynamique ; Ecoulement cellulaire ;
Instabilité ; Onde non-linéaire ; Ecoulement de mercure ;
Visualisations d'écoulements.